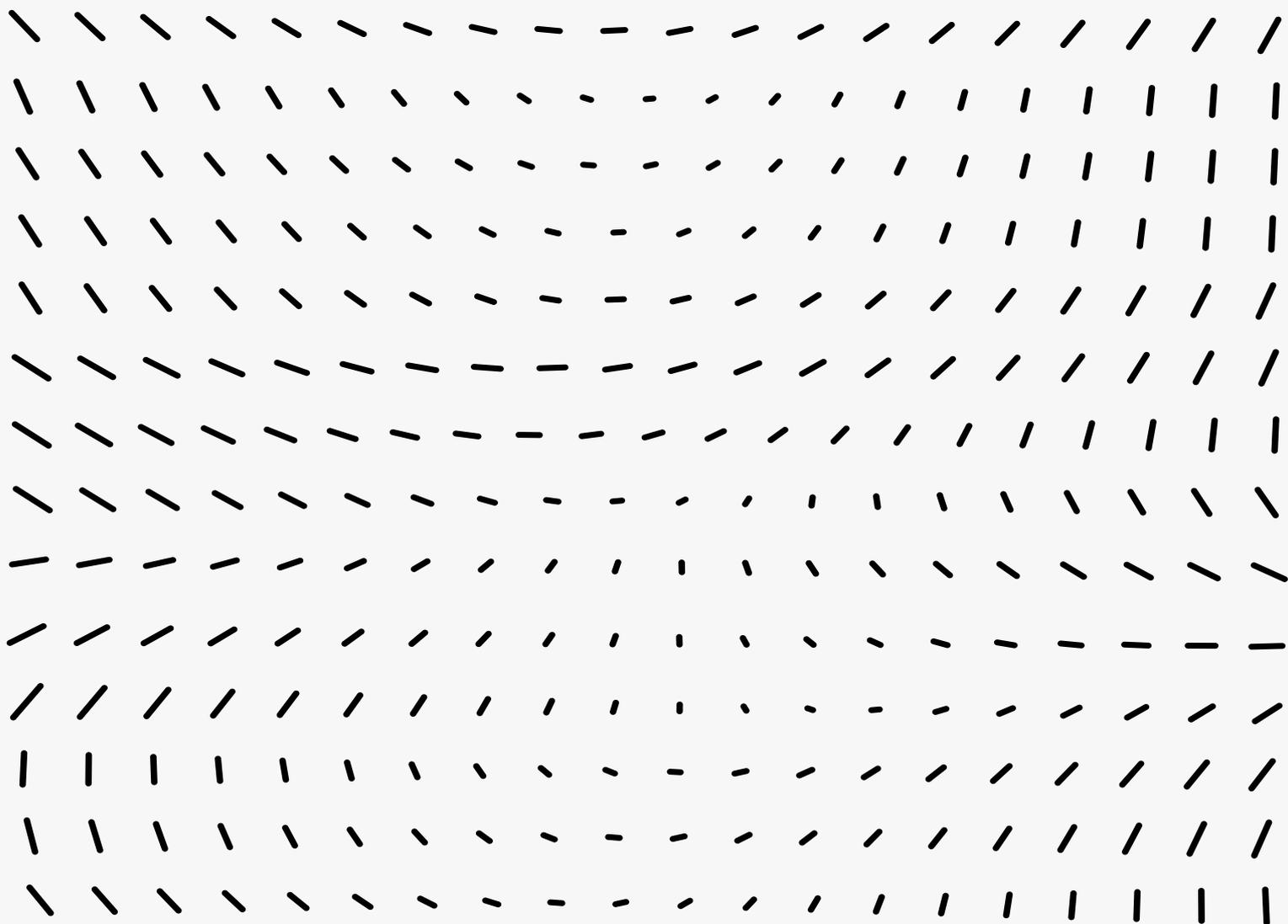


Geometria II



GEOMETRIA PROIETTIVA

DEF. Sia K un campo e sia V uno spazio vettoriale su K .

Lo spazio proiettivo associato a V è

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim$$

dove $v \sim w \iff \exists \lambda \in K^* \text{ t.c. } v = \lambda w$

Fatto: \sim è una relazione di equivalenza

C'è una bijezione naturale

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &\longleftrightarrow \{\text{rette di } V\} \\ [v] &\longleftrightarrow \text{Span}(v) \end{aligned}$$

← sottospazi vettoriali di dim 1

DEF. la dimensione di $\mathbb{P}(V)$ è $\dim \mathbb{P}(V) = \dim_K V - 1$

Gli spazi proiettivi 1-dimensionali si chiamano **rette proiettive**

Quelli 2-dimensionali si chiamano **piani proiettivi**

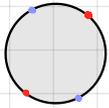
- $V = \{0\}$ $\mathbb{P}(V) = \emptyset / \sim = \emptyset$
 $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \emptyset = -1$
- $\dim V = 1$ cioè V è una retta vettoriale
 $\mathbb{P}(V) = \{*\}$ è un punto in quanto tutti i vettori di $V \setminus \{0\}$ sono equivalenti
 $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \{*\} = 1 - 1 = 0$
- $V = K^{n+1}$, $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(K^{n+1})$ si denota $\mathbb{P}^n(K)$ ed è detto lo spazio proiettivo standard di dim n

esempio $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ la retta proiettiva reale

Le semirette di \mathbb{R}^2 sono in bijezione naturale con $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\}$

$$S^1 \longleftrightarrow \{\text{semirette di } \mathbb{R}^2\}$$

$$v \longleftrightarrow \{\lambda v, \lambda > 0\}$$



Per ottenere un insieme di rappresentanti, devo scegliere un punto di S^1 per ogni coppia di punti antipodali.

Un insieme di rappresentanti è ad esempio una semicirconferenza aperta in un estremo e chiusa dall'altro



È più corretto però pensare a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ come a una circonferenza chiusa in entrambi gli estremi, con gli estremi identificati:



DEF Una trasformazione proiettiva è una funzione $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che esiste $\varphi: V \rightarrow W$ lineare tale che $f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$ (cioè f sia indotta da φ per "passaggio al quoziente")

Oss Se una tale φ esiste, necessariamente $\varphi: V \rightarrow W$ è iniettiva. Se φ non è iniettiva, infatti, $\exists v \in \ker \varphi \setminus \{0\}$ e si avrebbe $f([v]) = [\varphi(v)] = [0]$ non esiste in $\mathbb{P}(W)$
 \uparrow ben definito perché $v \neq 0$

proposizione Se $\varphi: V \rightarrow W$ è lineare e iniettiva, allora φ induce $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tale che $f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$. Tale f è perciò la trasformazione proiettiva associata a φ .

DIMOSTRAZIONE

Bisogna solo vedere che la formula $f([v]) = [\varphi(v)]$ è ben definita, cioè che se $[v] = [v']$ allora $[\varphi(v)] = [\varphi(v')]$

Ma $[v] = [v'] \Rightarrow \exists \lambda \in K^* \quad v = \lambda v' \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') = \lambda \varphi(v') \Rightarrow [\varphi(v)] = [\varphi(v')]$

Devo anche osservare che la formula abbia senso, cioè che se $[v] \in \mathbb{P}(V)$ allora $[\varphi(v)] \in \mathbb{P}(W)$, cioè se $v \neq 0$ allora $\varphi(v) \neq 0$, il che è garantito dall'iniettività di φ . □

Oss Ogni trasformazione proiettiva è iniettiva.

proposizione Sia $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva. Allora sono fatti equivalenti:

- (1) f è surgettiva
- (2) f è bigettiva
- (3) $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$
- (4) f è invertibile e $f^{-1}: \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è una trasformazione proiettiva.

DIMOSTRAZIONE

(1) \Leftrightarrow (2): ok

(2) \Rightarrow (3): sia $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ bigettiva indotta da $\varphi: V \rightarrow W$ lineare.

Sappiamo che φ è iniettiva, vediamo che è surgettiva.

Dato $w \in W$, se $w = 0$ allora $\varphi(0) = w$; se $w \neq 0$, per surgettività

di $f \exists v \in V$ t.c. $f([v]) = [w]$ cioè $[\varphi(v)] = [w]$ quindi

$\exists \lambda \in K^* \quad \varphi(v) = \lambda w$ cioè $\varphi(\lambda^{-1}v) = w$, dunque φ è surgettiva.

Dunque $\varphi: V \rightarrow W$ è lineare e bigettiva perciò $\dim V = \dim W$

quindi $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$.

(3) \Rightarrow (4) Per def. di dimensione, $\dim V = \dim W$. Sia f indotta da $\varphi: V \rightarrow W$ lineare.

Poiché φ è iniettiva, φ è anche surgettiva. Dunque $\varphi^{-1}: W \rightarrow V$ è un iso lineare e la mappa da esso indotta è f^{-1} (verifica)

(4) \Rightarrow (1): ovvio □

proposizione (1) α l'identità di $\mathbb{P}(V)$ è una trasformazione proiettiva
 (2) la composizione di trasformazioni proiettive è una trasformazione proiettiva

DIMOSTRAZIONE

(1) ovvio, è indotta da id_V lineare

(2) Sia $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ indotta da $\varphi: V \rightarrow W$

Sia $g: \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$ indotta da $\psi: W \rightarrow Z$

Allora $\psi \circ \varphi: V \rightarrow Z$ è lineare in quanto composizione di lineari e

$$(g \circ f)([v]) = g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\psi(\varphi(v))]$$

dunque $\psi \circ \varphi$ induce $g \circ f$ che è una trasformazione proiettiva \square

DEF. Una trasformazione proiettiva invertibile si chiama **isomorfismo proiettivo**.
 Una trasformazione proiettiva da $\mathbb{P}(V)$ in sé si chiama **proiettività**.

Oss Le proiettività sono isomorfismi proiettivi
 Le proiettività di $\mathbb{P}(V)$ costituiscono un gruppo,
 che si denota con **$\text{PGL}(V)$**

Oss $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ proiettività
 I punti fissi di f sono in biiezione con le rette di autovettori di φ ,
 dove $\varphi: V \rightarrow V$ induce f
 Infatti $f([v]) = [v] \iff [\varphi(v)] = [v] \iff \varphi(v) = \lambda v$

corollario Data $f: \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, n pari, proiettività
 Allora f ammette un punto fisso

DIMOSTRAZIONE

Infatti ogni $\varphi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ lineare ammette un autovettore se $n+1$ è dispari
 (perché il polinomio caratteristico ha grado $n+1$ e quindi ha una soluzione in \mathbb{R}) \square

corollario Ogni proiettività $f: \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
 ammette un punto fisso

DEF. $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un **sottospazio proiettivo** se $\exists W \subseteq V$ sottospazio vettoriale
 t.c. $H = \pi(W \setminus \{0\})$, dove $\pi: V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è la proiezione al quoziente.
 Si scrive $\mathbb{P}(W) = H$ e si pone $\dim H = \dim W - 1$

Oss Quella appena data è una buona definizione di dimensione, perché fissato H esiste al più un sottospazio vettoriale W f.c. $H = \mathbb{P}(W)$.

Più precisamente, c'è una bijezione

$$\begin{array}{ccc} \{\text{sottospazi proiettivi di } \mathbb{P}(V)\} & \longleftrightarrow & \{\text{sottospazi vettoriali di } V\} \\ \pi(W \setminus \{0\}) & \xleftarrow{\alpha} & W \\ H & \xrightarrow{\beta} & \pi^{-1}(H \cup \{0\}) \end{array}$$

Che $\alpha \circ \beta = \text{id}$ sull'insieme dei sottospazi proiettivi segue facilmente dalla surgettività di π

Più interessante è che $\beta(\alpha(W)) = W$ per ogni W sottospazio vettoriale

Il fatto che $\beta(\alpha(W)) \supseteq W$ è ovvio per banali motivi insiemistici

Il fatto che $\beta(\alpha(W)) \subseteq W$ dipende dal fatto che W è sottospazio vettoriale

sia $w \in \beta(\alpha(W))$, per cui $w = 0$ o $w \in \pi^{-1}(\pi(W \setminus \{0\}))$

se $w = 0$, allora $w \in W$ perché è un sottospazio vettoriale

altrimenti $w \in \pi^{-1}(\pi(W \setminus \{0\})) \Rightarrow \pi(w) \in \pi(W \setminus \{0\})$

$\Rightarrow \exists w' \in W \setminus \{0\}$ f.c. $\pi(w') = \pi(w) \Rightarrow w = \lambda w'$ per qualche $w' \in W \setminus \{0\}$

e quindi $w \in W$ perché W è un sottospazio vettoriale. □

proposizione Siano $S_i, i \in I$, sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, allora $\bigcap_{i \in I} S_i$ è un sottospazio proiettivo

DIMOSTRAZIONE

Poiché π è surgettiva, $\bigcap_{i \in I} S_i = \pi(\pi^{-1}(\bigcap_{i \in I} S_i)) = \pi(\bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(S_i)) = \pi(\bigcap_{i \in I} (H_i \setminus \{0\})) = \pi(\bigcap_{i \in I} H_i \setminus \{0\})$
 con H_i ssp vettoriale ↙ che è ssp vettoriale □

Oss Per ogni sottoinsieme $F \subseteq \mathbb{P}(V)$, è ben definito il più piccolo sottospazio di $\mathbb{P}(V)$ che contiene F , che viene denotato con $L(F)$: basta porre

$$L(F) = \bigcap_{\substack{S \text{ ssp di } \mathbb{P}(V) \\ S \supseteq F}} S \quad \text{sottospazio generato da } F$$

Come nel caso vettoriale, l'unione di due sottospazi S_1 e S_2 in generale non è un sottospazio.

Si considera allora il sottospazio da essi generato, cioè

$$L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2)$$

proposizione Se $S_1 = \mathbb{P}(H_1) = \pi(H_1 \setminus \{0\})$
 $S_2 = \mathbb{P}(H_2) = \pi(H_2 \setminus \{0\})$ con H_i ssp vettoriali
 allora $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2) = \pi((H_1 + H_2) \setminus \{0\})$

DIMOSTRAZIONE

Poiché $S_1 = \mathbb{P}(H_1) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$ e analogamente per S_2 , allora

$S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$, da cui $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$ per minimalità di $L(S_1, S_2)$

Viceversa, $\pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \supseteq \pi^{-1}(S_1) = H_1 \setminus \{0\}$

Analogamente $\pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \supseteq \pi^{-1}(S_2) = H_2 \setminus \{0\}$

Quindi $\pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \supseteq (H_1 \cup H_2) \setminus \{0\}$

$W \setminus \{0\}$ per qualche $W \subseteq V$ ssp vettoriale

$W \setminus \{0\} \supseteq (H_1 \cup H_2) \setminus \{0\} \Rightarrow W \supseteq H_1 \cup H_2 \Rightarrow W \supseteq H_1 + H_2$ perché W è ssp vettoriale

Dunque $L(S_1, S_2) = \pi(W \setminus \{0\}) \supseteq \pi((H_1 + H_2) \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$ □

Formula di Grassmann proiettiva Siamo $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottospazi, allora
 $\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$

DIMOSTRAZIONE

Sia $S_i = \mathbb{P}(H_i)$. Allora $\dim L(S_1, S_2) = \dim(H_1 + H_2) - 1 =$
 $= \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2) - 1 = \dim S_1 + 1 + \dim S_2 + 1 - \dim(S_1 \cap S_2) - 1 - 1 =$
 $= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$ □

corollario S_1 e S_2 sottospazi di $\mathbb{P}(V)$ con $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$
 allora $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

DIMOSTRAZIONE

$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(V) \geq 0$
 dunque $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ □

corollario Due rette in un piano proiettivo si incontrano sempre

Impareremo a pensare a $\mathbb{P}^n(K)$ come un "completamento" dello spazio affine K^n
 (per cui in un certo senso $K^n \subseteq \mathbb{P}^n(K)$)

Due rette parallele in K^2 si incontreranno proprio nei loro punti aggiunti in $\mathbb{P}^2(K) \setminus K^2$
 retta all'infinito

esercizio Siamo r_1, r_2 rette disgiunte in $\mathbb{P}^3(K)$ e sia $P \in \mathbb{P}^3(K) \setminus (r_1 \cup r_2)$
 Si mostri che $\exists!$ retta $r \subseteq \mathbb{P}^3(K)$, $P \in r$, $r \cap r_1 \neq \emptyset$, $r \cap r_2 \neq \emptyset$



SOLUZIONE Se esiste, la retta cercata dovrebbe essere contenuta nel piano (se è un piano) generato da P e r_1 ; analogo per P e r_2 . Voglio poi intersecare questi piani, sperando di ottenere la retta voluta.

Perché $P \notin r_1$, se $S_1 = L(P, r_1)$, $\dim S_1 = \dim P + \dim r_1 - \dim \emptyset = 0 + 1 - (-1) = 2$

Analogamente, se $S_2 = L(P, r_2)$, $\dim S_2 = 2$

Pongo $r = S_1 \cap S_2$ e mostro che $\dim r = 1$

Osserviamo che $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}^3(K)$. Se così non fosse, poiché

$S_i \subseteq L(S_1, S_2)$, avremo $\dim L(S_1, S_2) = 2$.

Ma allora avremmo $r_1 \cup r_2 \subseteq L(S_1, S_2)$, cosa impossibile perché due rette complanari si intersecano sempre, ma $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

Donque $\dim r = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) = 2 + 2 - 3 = 1$

r perciò è una retta e per costruzione $P \in r = S_1 \cap S_2$

Inoltre per costruzione r e r_1 giacciono su S_1 ; poiché due rette complanari si intersecano, $r \cap r_1 \neq \emptyset$. Analogamente $r \cap r_2 \neq \emptyset$

Questo dimostra l'esistenza di r .

Per l'unicità, se r' soddisfa la tesi, $P \in r'$, $r' \cap r_1 \neq \emptyset$

$\Rightarrow r' \subseteq L(P, r_1) = S_1$. Analogamente $r' \subseteq S_2$

Quindi $r' \subseteq S_1 \cap S_2 = r$, da cui $r' = r$ per motivi dimensionali.

Riferimenti proiettivi

DEF. Siano $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ si dicono **indipendenti** se presi $v_i \in V$ t.c. $P_i = [v_i] \forall i$ si ha che i vettori v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti in V
Si dicono **dipendenti** se non sono indipendenti

Oss è una buona definizione, perché se v_i' sono altri vettori di V con $[v_i'] = P_i \forall i$, allora $v_i' = \lambda_i v_i$ per un qualche $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ e dunque v_1, \dots, v_k sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono v_1', \dots, v_k'

esercizio $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono indipendenti se e solo se $\dim L(\{P_1, \dots, P_k\}) = k-1$

In particolare, se $n = \dim \mathbb{P}(V)$ e $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono indipendenti, allora $k \leq n+1$

DEF. $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono in **posizione generale** se qualsiasi sottoinsieme di $\{P_1, \dots, P_k\}$ fatto da h punti, con $h \leq n+1$, è indipendente

esempio se $\dim \mathbb{P}(V) = 2$, P_1, \dots, P_k sono in posizione generale se e solo se sono a tre a tre non allineati

In altre parole: se $k \leq n+1$, è la stessa cosa che chiedere che $\{P_1, \dots, P_k\}$ siano indipendenti
Se $k > n+1$, è equivalente chiedere che tutte le $n+1$ -uple dell'insieme siano indipendenti

DEF. Un **riferimento proiettivo** di $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = n$, è una $(n+2)$ -upla $R = (P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ di punti di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale. Il punto P_{n+1} si chiama punto unità di R ; P_0, \dots, P_n si chiamano punti fondamentali.

DEF. Se R è un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, una **base normalizzata associata ad R** è una base di V , (v_0, \dots, v_n) t.c. $[v_i] = P_i \forall 0 \leq i \leq n$
e $P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$

teorema Sia R un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

- (1) esiste una base normalizzata (v_0, \dots, v_n) di V rispetto a R
- (2) se (v'_0, \dots, v'_n) è una seconda base normalizzata di V rispetto a R , allora $\exists \lambda \in K^*$ t.c. $v'_i = \lambda v_i \quad \forall 0 \leq i \leq n$

Ossia, l'enunciato sta affermando che:

la base normalizzata esiste ed è unica a meno di riscalamento simultaneo

DIMOSTRAZIONE

(1) Sia $R = (P_0, \dots, P_{n+1})$.

Scelgo $v_i \in V$ t.c. $[v_i] = P_i$

Noto che (v_0, \dots, v_n) formano una base di V , perché i P_0, \dots, P_n sono indipendenti (per definizione di riferimento proiettivo).

Scelgo anche $v_{n+1} \in V$ t.c. $[v_{n+1}] = P_{n+1}$

Perciò avrò $v_{n+1} = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$ con $a_i \in K$ (in modo unico)

Osservo che $a_i \neq 0 \quad \forall i$; altrimenti, se $a_i = 0$, avrei che i vettori

$v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n, v_{n+1}$ sono linearmente dipendenti

Questo contraddice il fatto che $P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_{n+1}$ siano indipendenti

(che vale perché R è un riferimento proiettivo).

Donque $a_i \neq 0 \quad \forall i$

Pongo $v'_i = a_i v_i$

Ho che (v'_0, \dots, v'_n) sono ancora una base di V e t.c. $[v'_i] = P_i$

Inoltre, per costruzione, $P_{n+1} = [v_{n+1}] = [v_0 + \dots + v_n]$

e quindi (v'_0, \dots, v'_n) è una base normalizzata

(2) Sia (v''_0, \dots, v''_n) un'altra base normalizzata di V rispetto a R

So che $[v'_i] = P_i = [v''_i] \quad \forall 0 \leq i \leq n \Rightarrow v'_i = \lambda_i v''_i$ per un qualche $\lambda_i \in K^*$

Usando il punto unità

$$[v'_0 + \dots + v'_n] = P_{n+1} = [v''_0 + \dots + v''_n]$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in K^* \text{ t.c. } v'_0 + \dots + v'_n = \lambda(v''_0 + \dots + v''_n)$$

$$\text{cioè } \lambda_0 v''_0 + \dots + \lambda_n v''_n = \lambda v''_0 + \dots + \lambda v''_n$$

Dato che (v''_0, \dots, v''_n) è una base di V , $\lambda_i = \lambda \quad \forall 0 \leq i \leq n$

e dunque $v'_i = \lambda v''_i \quad \forall 0 \leq i \leq n$ con $\lambda \in K^*$

□

teorema Siano $f, g: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ due trasformazioni proiettive e $\varphi, \psi: V \rightarrow W$ lineari t.c. $f = [\varphi]$ e $g = [\psi]$
 Sia \mathcal{R} un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$.
 Sono equivalenti:
 (1) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $\varphi = \lambda \psi$
 (2) $f = g$
 (3) $f(P) = g(P) \quad \forall P \in \mathcal{R}$

DIMOSTRAZIONE

(1) \Rightarrow (2) chiaro: se $\varphi = \lambda \psi$, allora, dato $P = [v]$
 $f(P) = [\varphi(v)] = [\lambda \psi(v)] = [\psi(v)] = g(P)$
 e dunque $f = g$

(2) \Rightarrow (3): ovvio

(3) \Rightarrow (1): fissiamo una base normalizzata (v_0, \dots, v_n) di V
 rispetto a $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$

Per ipotesi $f(P_i) = g(P_i)$ per $0 \leq i \leq n$
 $[\varphi(v_i)] = [\psi(v_i)] \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{K}^*$ t.c. $\varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i)$

Inoltre, per il punto unita':

$[\varphi(v_0 + \dots + v_n)] = f(P_{n+1}) = g(P_{n+1}) = [\psi(v_0 + \dots + v_n)]$
 $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $\varphi(v_0 + \dots + v_n) = \lambda \psi(v_0 + \dots + v_n)$

$\lambda_0 \varphi(v_0) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n) = \varphi(v_0) + \dots + \varphi(v_n) \quad \lambda \psi(v_0) + \dots + \lambda \psi(v_n)$

Visto che ψ è iniettiva e v_0, \dots, v_n sono linearmente indipendenti,
 segue che $\psi(v_0), \dots, \psi(v_n)$ sono linearmente indipendenti
 $\Rightarrow \lambda_i = \lambda \quad \forall 0 \leq i \leq n$

Ora, visto che $\varphi(v_i) = \lambda \psi(v_i) \quad \forall 0 \leq i \leq n$ e v_0, \dots, v_n sono una base di V ,
 segue che $\varphi = \lambda \psi$ come funzioni □

corollario Il gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ $\text{PGL}(V)$
 è isomorfo a $\text{GL}(V)/N$
 dove $N = \{ \lambda \text{id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^* \} \triangleleft \text{GL}(V)$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}(V) & \longrightarrow & \text{PGL}(V) \\ \varphi & \longmapsto & [\varphi] \end{array}$$

- è un omomorfismo (con la composizione)
- è suriettiva per def. di trasformazione proiettiva
- $\text{Ker} = N$ per il teorema precedente

Per il I teorema di omomorfismo segue la tesi □

NOTAZIONE $V = K^{n+1}$ $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(K^{n+1}) = \mathbb{P}^n(K)$

$\text{PGL}(K^{n+1}) = \text{PGL}_{n+1}(K)$

↙ taglia delle matrici

esempio $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ sono le proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

**teorema
fondamentale delle
trasformazioni
proiettive**

Siano $\mathbb{P}(V), \mathbb{P}(W)$ due spazi proiettivi con $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$
e R, R' due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente,
Allora $\exists!$ trasformazione proiettiva $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$
che manda ordinatamente R in R' .

DIMOSTRAZIONE

d'unicità segue direttamente dal teorema precedente

Per l'esistenza, fissiamo due basi normalizzate per i due riferimenti

(v_0, \dots, v_n) per R e (w_0, \dots, w_n) per R'

Dall'algebra lineare, $\exists!$ $\varphi: V \rightarrow W$ lineare t.c. $\varphi(v_i) = w_i \quad \forall 0 \leq i \leq n$

Pongo $f = [\varphi]$

Per costruzione $f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] \quad \forall 0 \leq i \leq n$

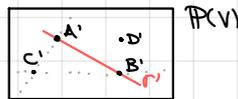
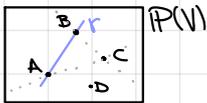
Ma ho anche $f([v_0 + \dots + v_n]) = [\varphi(v_0 + \dots + v_n)] = [w_0 + \dots + w_n]$

quindi il punto unita' di R va nel punto unita' di R' \square

esercizio Se r e r' sono due rette in un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$, allora
esiste una proiettività di $\mathbb{P}(V)$ che mandi r in r'

SOLUZIONE (1) "passare all'algebra lineare,"

(2) "soluzione sintetica," : scegliamo riferimenti proiettivi appropriati
per applicare il teorema



Scelgo $A \neq B \in r$ e $A' \neq B' \in r'$ e $C \notin r, C' \notin r'$

$D \notin r \cup L(B, C) \cup L(A, C)$ e $D' \notin r' \cup L(B', C') \cup L(A', C')$

(si può sempre fare)

A questo punto $R = (A, B, C, D)$ e $R' = (A', B', C', D')$ sono due rif. proiettivi

e per il teorema $\exists!$ $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ che mandi ordinatamente R in R'

Segue che $f(r) = f(L(A, B)) = L(f(A), f(B)) = L(A', B') = r'$

coordinate omogenee

Caso base: $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \{ [x_0, \dots, x_n] \text{ t.c. } x_i \text{ non tutti nulli} \}$$
$$\text{con } [x_0, \dots, x_n] = [y_0, \dots, y_n] \iff x_i = \lambda y_i \quad \forall 0 \leq i \leq n$$

DEF. Si dice che il punto $[x_0, \dots, x_n]$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha **coordinate omogenee** (rispetto al riferimento proiettivo standard) $[x_0, \dots, x_n]$ oppure $[x_0 : \dots : x_n]$.
Il **riferimento standard** di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è il riferimento indotto dalla base standard, cioè $P_i = [0, \dots, 1, \dots, 0]$ e $P_{n+1} = [1, 1, \dots, 1]$

↳ posto i -esimo

(è come dire che le coordinate di $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$ sono $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$)

Oss Le coordinate omogenee di un punto sono ben definite a meno di riscalamento simultaneo

$$[1, 1, 2] = [2, 2, 4] \text{ in } \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$[0, \dots, 0]$ non rappresenta un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Caso generale

DEF. Se ho $\mathbb{P}(V)$ spazio proiettivo con $\dim \mathbb{P}(V) = n$ e $R = (P_0, \dots, P_{n+1})$ è un riferimento proiettivo, questo induce delle **coordinate omogenee** nei due modi seguenti (equivalenti)

(1) So che $\exists!$ $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che porta il riferimento R nel riferimento standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (per il teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive)

Le coordinate omogenee di un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ relative al riferimento R sono $f(P) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

(2) Sia (v_0, \dots, v_n) una base normalizzata di V rispetto a R .

Dato $P \in \mathbb{P}(V)$, se $P = [v]$ con $v \in V$, posso scrivere in modo unico

$$v = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$$

e dico che le coordinate di P rispetto a R sono $[a_0, \dots, a_n]$

Equivalenza: f è indotta da $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ isomorfismo lineare t.c. $\varphi(v_i) = e_i$, $0 \leq i \leq n$

Sia $P = [v]$ con $v = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$

$$\text{Allora } f(P) = [\varphi(v)] = [\varphi(a_0 v_0 + \dots + a_n v_n)] = [a_0 e_0 + \dots + a_n e_n] = [a_0, \dots, a_n]$$

Nel caso vettoriale, fissare una base di V equivale a fissare un isomorfismo lineare $V \cong \mathbb{K}^{n+1}$
Analogamente, nel proiettivo, fissare un riferimento proiettivo equivale a fissare un isomorfismo proiettivo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Usando le coordinate omogenee, si possono rappresentare trasformazioni proiettive e sottospazi con matrici e equazioni lineari
(sempre definite a meno di moltiplicazione per scalare non nullo)

Se $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è una trasformazione proiettiva,
 R, R' due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente,
 B e B' due basi normalizzate rispettive di V e W ,
se $f = [\varphi]$ con $\varphi: V \rightarrow W$, posso considerare la matrice $M \in M((m+1)(n+1), \mathbb{K})$
($n+1 = \dim V, m+1 = \dim W, n \leq m$) che rappresenta φ rispetto a B e B'
Allora M rappresenta la trasformazione proiettiva f , nel senso che
 $[f(P)]_{R'} = M \cdot [P]_R$
(più propriamente, $[M \cdot v]_{B'} = [v]_B$ dove $[v]_B = P$)
Notare che la matrice M associata a f è unica
a meno di moltiplicazione per scalare non nullo

Sottospazi

• **Rappresentazione cartesiana** (tramite equazioni)

Se $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo, $S = \mathbb{P}(W)$, con $W \subseteq V$ sottospazio.
Se $n = \dim \mathbb{P}(V)$, $k = \dim S$, allora fissato un riferimento R di $\mathbb{P}(V)$ e una base normalizzata B associata, il sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ può essere descritto come luogo di zeri di $(n+1) - (k+1) = n-k$ equazioni omogenee nelle coordinate indotte da B $\{s_1 = \dots = s_{n-k} = 0\}$

Tali equazioni descrivono anche S dentro $\mathbb{P}(V)$, nel senso che $P \in \mathbb{P}(V)$ sta in S se e solo se $[P]_R$ soddisfa le equazioni $s_1 = \dots = s_{n-k} = 0$

In pratica sto guardando se un rappresentante $v_P \in V$ di P soddisfa le equazioni o no. Questa condizione non dipende dalla scelta di v_P perché le equazioni $s_1 = \dots = s_{n-k} = 0$ sono omogenee

esempio In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ posso considerare il sottospazio proiettivo descritto dall'equazione $x_0 + x_1 - x_2 = 0$ (è una retta proiettiva)
Ad esempio $[1, 1, 2]$ appartiene alla retta, e anche $[\lambda, \lambda, 2\lambda]$ effettivamente continua a soddisfare l'equazione

Oss Le equazioni lineari non omogenee non descrivono luoghi del proiettivo, perché essere soluzione non è invariante per riscalamento

esempio $x_0 + x_1 - x_2 = 1$: il punto $(1, 1, 1)$ soddisfa l'equazione mentre $(2, 2, 2)$ non la soddisfa

Rappresentare S con una rappresentazione cartesiana corrisponde a descrivere $W \subseteq V$ come Ker di un'applicazione lineare

• **Rappresentazione parametrica**

Si rappresenta $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ (e il suo corrispondente lineare) come immagine di un'applicazione proiettiva (lineare)

Nel vettoriale, questo vuol dire scrivere un elemento di W come un elemento dello span di un certo insieme di vettori

esempio In \mathbb{R}^3 $\{x_1 - x_2 + x_3 = 0\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$v = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \text{cioè } v = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 + t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Il sottospazio proiettivo associato di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sarà descritto dalla rappresentazione parametrica

$$\{[t_1, t_1 + t_2, t_2] \mid (t_1, t_2) \neq (0, 0)\}$$

Notare che la coppia (t_1, t_2) può essere pensata come un punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Quindi si può scrivere

$$\{[t_1, t_1 + t_2, t_2] \mid [t_1, t_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$$

Attenzione: l'espressione $t_1[1, 1, 0] + t_2[0, 1, 1]$ non ha alcun senso

Quello che ha senso è scrivere $[t_1(1, 1, 0) + t_2(0, 1, 1)]$ (con $(t_1, t_2) \neq (0, 0)$)

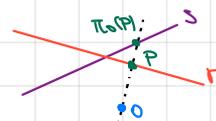
DEF Un **iperpiano** in $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di codimensione 1

Per quanto detto, gli iperpiani sono descritti da un'equazione lineare omogenea non identicamente nulla, unica a meno di riscalamento

Prospettività

DEF Siano r, s due rette in un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ e fissiamo $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$

Definisco $\pi_0: r \rightarrow s$ come $\pi_0(P) = L(O, P) \cap s$



proposizione π_0 è ben definita ed è una trasformazione proiettiva

DIMOSTRAZIONE

Innanzitutto $L(O, P)$ ha senso perché $P \neq O$

Inoltre $L(O, P) \cap s$ è un punto in quanto le rette sono distinte, poiché $O \in L(O, P)$ ma $O \notin s$

Voglio vedere che π_0 è indotta da una applicazione lineare $V_r \rightarrow V_s$, dove questi sono i sottospazi vettoriali di che corrispondono a r e s

Fissiamo un riferimento proiettivo appropriato in $\mathbb{P}(V)$

Chiamo $A = r \cap s$ e scelgo $B \in r \setminus \{A\}$ e $C \in s \setminus \{A, L(O, B) \cap s\}$

Uso il riferimento proiettivo (A, B, C, O)

Nelle coordinate indotte avrò

$$A = [1, 0, 0] \quad B = [0, 1, 0] \quad C = [0, 0, 1] \quad O = [1, 1, 1]$$

la retta r passa per A e B e quindi ha equazione $x_2 = 0$,

$$\text{cioè } r = \{[x_0, x_1, 0] \mid [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$$

Analogamente la retta s ha equazione $x_1 = 0$, cioè

$$s = \{[x_0, 0, x_2] \mid [x_0, x_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$$

Uso le coordinate indotte su r e s per verificare che π_0 è una trasformazione proiettiva

Punto da $P = [a, b, 0] \in r$ e mi chiedo chi è $\pi_0(P)$
 Devo scrivere un'equazione per $L(O, P)$ e il punto $L(O, P) \cap s$
 L'equazione di $L(O, P)$ si trova imponendo $\det \begin{pmatrix} 1 & a & x_0 \\ 1 & b & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \end{pmatrix} = 0$

Sviluppando $-bx_0 + ax_1 + (b-a)x_2 = 0$

L'intersezione $L(O, P) \cap s$ si trova risolvendo

$$\begin{cases} -bx_0 + ax_1 + (b-a)x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -bx_0 + (b-a)x_2 = 0$$

che ha come soluzione $[b-a, 0, b]$

Da questo calcolo si vede che, in coordinate, π_0 è descritta dall'applicazione lineare $r \rightarrow s$

$$[a, b] \mapsto [b-a, b]$$

e quindi è una trasformazione proiettiva

(si verifica che una matrice associata è invertibile) \square

teorema Se r e s sono rette in \mathbb{P}^1 e $f: r \rightarrow s$ una trasformazione proiettiva allora f è una prospettività rispetto a un qualche punto O se e solo se $A = r \cap s$ è fissato da f

DIMOSTRAZIONE

\Rightarrow : è chiaro dalla costruzione di π_0

\Leftarrow : sia $f: r \rightarrow s$ trasformazione proiettiva t.c. $f(A) = A$

Cerchiamo il punto O della prospettività

Preso $B \in r \setminus \{A\}$, considero $f(B) \in s$. Si ha che $f(B) \neq A$ perché f è iniettiva

Prendo $B' \in r \setminus \{A, B\}$, considero $f(B') \in s \setminus \{A, f(B)\}$

L'ipotetico punto O deve stare su $L(B, f(B))$ e $L(B', f(B'))$,
 due rette distinte

Considero $O = L(B, f(B)) \cap L(B', f(B'))$

Voglio mostrare che $f = \pi_0$

Nota che (A, B, B') e $(A, f(B), f(B'))$ sono riferimenti proiettivi di r e s ,
 e per costruzione f e π_0 coincidono sul riferimento

Quindi $f = \pi_0$ \square

NOTA in realtà π_0 è la restrizione ad r di una funzione

$\mathbb{P}^1 \setminus \{O\} \rightarrow s$ la proiezione da O a s

$P \mapsto L(O, P) \cap s$

È una trasformazione proiettiva degenerata, cioè

l'applicazione lineare associata ha un nucleo non banale,
 e dunque non può essere definita su tutto \mathbb{P}^1

carte affini e punti all'infinito

DEF. In $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, per ogni $i=0, \dots, n$ poniamo

$$H_i = \{x_i = 0\} \quad \text{i-esimo iperpiano coordinato}$$

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i = \{x_i \neq 0\}$$

Come spazi proiettivi, $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

proposizione C'è una biiezione naturale tra U_i e \mathbb{K}^n per ogni $i=0, \dots, n$ la denotiamo $j_i: \mathbb{K}^n \rightarrow U_i$, chiamata i-esima carta affine

DIMOSTRAZIONE

$$j_i: \mathbb{K}^n \rightarrow U_i$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1, x_2, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x_n]$$

è ben definita, perché $[x_1, x_2, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x_n] \in U_i$ dato che $1 \neq 0$ da sua inversa è

$$j_i^{-1}: U_i \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$[x_0, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\overset{i}{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

è ben definita perché $x_i \neq 0$, e perché se prendo un altro rappresentante

$$(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \text{ del punto } [x_0, \dots, x_n], \text{ ottengo } \left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i} \right) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

È immediato verificare che sono inverse

$$j_i^{-1} \circ j_i(x_1, \dots, x_n) = j_i^{-1}([x_1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x_n]) = (x_1, \dots, x_n)$$

$$j_i \circ j_i^{-1}([x_0, \dots, x_n]) = j_i\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) = \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] = [x_0, \dots, x_i, \dots, x_n]$$

□

Quindi abbiamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = H_i \cup U_i$ per $i=0, \dots, n$
 $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \stackrel{||}{=} \mathbb{K}^n$

Quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ può essere pensato come un'estensione di \mathbb{K}^n , in cui si aggiunge un $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

Per convenzione, si usa $j_0: \mathbb{K}^n \rightarrow U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ per pensare \mathbb{K}^n in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

DEF. I punti di H_0 si chiamano punti all'infinito (rispetto a j_0) e H_0 si chiama piano all'infinito.

esempio $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0 \cong \mathbb{K} \cup \{\text{pt}\}$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

insieme delle direzioni di \mathbb{R}^2

- proposizione** (1) Se K è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e $K \not\subset H_0$,
 la sua parte affine è $j_0^{-1}(K \cap U_0) \subset \mathbb{K}^n$
 ed è un sottospazio affine. La sua dimensione affine è uguale
 alla dimensione proiettiva di K
- (2) Sia $Z \neq \emptyset$ un sottospazio affine di \mathbb{K}^n
 Allora Z è la parte affine di un unico sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$,
 la chiusura proiettiva di Z , \bar{Z} (e ha la stessa dimensione di Z)

C'è una bijezione indotta da j_0 tra

ssp affini di \mathbb{K}^n con $\dim k$ e ssp proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ di $\dim k$, non contenuti in H_0

DIMOSTRAZIONE

(1) Sia $k = \dim K$. Abbiamo detto che K si può vedere come il luogo
 di zeri di un sistema lineare di rango $n-k = (n+1)-(k+1)$

$$\text{del tipo } \begin{cases} a_{1,0}x_0 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + \dots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Un punto di \mathbb{K}^n (x_1, \dots, x_n) di \mathbb{K}^n sta in $j_0^{-1}(K \cap U_0)$

$\Leftrightarrow j_0(x_1, \dots, x_n) = [1, x_1, \dots, x_n] \in K \cap U_0$, cioè se vale

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = -a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 + \dots + a_{n-k,n}x_n = -a_{n-k,0} \end{cases}$$

Il rango di questo sistema non omogeneo (completo) è ancora $n-k$

Dall'ipotesi $K \not\subset H_0$, segue che $j_0^{-1}(K \cap U_0) \neq \emptyset$, cioè il sistema
 non omogeneo ammette soluzioni, quindi per Rouché - Capelli
 il sistema descrive un sottospazio affine di codimensione $n-k$ in \mathbb{K}^n ,
 cioè di dimensione k .

(2) Prendo $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ con $\dim Z = k$. Questo ssp è descritto da
 un sistema lineare non omogeneo $Ax = b$

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = n-k$$

Chiamo \bar{Z} il sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ descritto dal
 sistema lineare omogeneo

$$(-b|A)\tilde{x} = 0 \quad \text{dove } \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Visto che $\text{rk}(-b|A) = \text{rk}(A|b) = n-k$,

\bar{Z} ha dimensione proiettiva k

Per costruzione, la parte affine di \bar{Z} è Z

Per l'unicità di \bar{Z} , se Z' è una qualche chiusura proiettiva di Z ,

cioè un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con parte affine Z , devo vedere che $Z' = \bar{Z}$

Notiamo che $\dim Z' = \dim \bar{Z}$

Considero $Z' \cap \bar{Z}$. Se $Z' \neq \bar{Z}$, $\dim Z' \cap \bar{Z} < \dim Z$, per cui

la parte affine dell'intersezione $Z' \cap \bar{Z}$ avrebbe pure dimensione minore.

Questo è assurdo perché $j_0^{-1}((Z' \cap \bar{Z}) \cap U_0) \supset Z$ e quindi

deve avere almeno $\dim Z$

□

Dalla dimostrazione, segue che la chiusura proiettiva di un iperpiano affine di equazione $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ ha equazione $-bx_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$.
 Si può pensare di sostituire $x_i \mapsto \frac{x_i}{x_0}$ ed eliminare il denominatore.
 Questa procedura si chiama **omogeneizzazione**, e si applica anche a polinomi di grado più alto.

DEF. Un polinomio $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ si dice **omogeneo** di grado d se tutti i monomi con coefficiente diverso da zero hanno grado totale d .

Nota: soltanto i polinomi omogenei definiscono dei luoghi di zeri nel proiettivo.

esempio in \mathbb{K}^2 , la retta affine $ax + by + c = 0$ ha chiusura affine $cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0$.
 L'unico punto all'infinito di questa retta si ottiene intersecando con $H_0 = \{x_0 = 0\}$ e si ottiene il punto $[0, -b, a] \in H_0$
 vettore direzione della retta.

DEF. Se $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine, i suoi punti all'infinito sono i punti di $\overline{Z} \cap H_0$.

proposizione Siano r, s due rette affini in \mathbb{K}^n .
 Allora r e s hanno lo stesso punto all'infinito se e solo se sono parallele.

NOTA: (1) una retta affine ha un solo punto all'infinito
 (2) per $n=2$, $\mathbb{K}^2 \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, questo è chiaro da quanto visto finora.

DIMOSTRAZIONE

Calcolo il punto all'infinito di una generica retta

$$r = \{p + tv \mid t \in \mathbb{K}\} \quad \text{dove } p \in \mathbb{K}^n, v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$$

la chiusura proiettiva \overline{r} è descritta dall'equazione parametrica

$$\overline{r} = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_1 p + t_2 v \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \right\}$$

Infatti, queste equazioni parametriche descrivono una retta, perché sono della forma $[t_1(1, p) + t_2(0, v)]$

Inoltre la retta descritta passa per i punti $[1, p]$ per $t_1=1, t_2=0$ (corrisponde a $p \in \mathbb{K}^n$) e $[1, p+v]$ per $t_1=t_2=1$ (corrisponde a $p+v \in \mathbb{K}^n$)

Segue che l'eq. parametrica descrive proprio \overline{r}

Il punto all'infinito di \overline{r} si trova imponendo che la 0-esima coordinata in $[t_1, t_1 p + t_2 v]$ sia 0, cioè $t_1=0$: l'unico punto all'infinito è quindi $[0, t_2 v] = [0, v]$

Quindi una qualsiasi retta affine in \mathbb{K}^n con direzione $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ha come unico punto all'infinito $[0, v]$

Segue che r e s si intersecano all'infinito se e solo se hanno la stessa direzione (cioè sono parallele) □

Quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \cup_0 \cup H_0 \cong \mathbb{K}^n \cup \{\text{direzioni in } \mathbb{K}^n\}$

Affinità e proiettività

proposizione Il gruppo delle affinità $\text{Aff}(\mathbb{K}^n)$ (cioè funzioni $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n : v \mapsto Av + b$ dove $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ e $b \in \mathbb{K}^n$) si identifica naturalmente con il sottogruppo $G < \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$ delle proiettività $f: \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che fissano H_0 , cioè $f(H_0) = H_0$

DIMOSTRAZIONE

Innanzitutto è chiaro che $G < \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$

Prendiamo $f \in G$ e fissiamo $M \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ che rappresenta f .

Scegliamo $M = \left(\begin{array}{c|c} d & c \\ \hline b & A \end{array} \right)$ dove $A \in \text{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, $d \in \mathbb{K}$, $b, c \in \mathbb{K}^n$

Lemma Una f come sopra soddisfa $f(H_0) = H_0$ se e solo se $c = 0$

DIMOSTRAZIONE

Il punto generico di H_0 è descritto da $[0, a_1, \dots, a_n]$ dove $a_i \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Affinché $f(H_0) = H_0$, è necessario e sufficiente che la 0-esima coordinata di $M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ sia 0

La 0-esima coordinata è data da $d \cdot 0 + \sum_{i=1}^n a_i c_i$

Questa quantità fa zero $\forall (a_1, \dots, a_n)$ se e solo se $c = 0$ \square

Quindi se M rappresenta $f \in G$, $M = \left(\begin{array}{c|c} d & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right)$

Ora posso anche dire che

- $d \in \mathbb{K}^*$ (perché M è invertibile)
- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

Visto che M è definita a meno di riscalamento, posso supporre $d=1$

Ora definisco $\varphi: G \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{K}^n)$

$f \mapsto f|_{\mathbb{K}^n}$ inteso in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con j_0

(1) è ben definita: • $\varphi(f)$ è una funzione $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, cioè $U_0 \rightarrow U_0$

perché $f(H_0) = H_0 \iff f(U_0) = U_0$

• $\varphi(f) \in \text{Aff}(\mathbb{K}^n)$: infatti, dato $v \in \mathbb{K}^n$

$$\varphi(f)(v) = f([1, v]) = \left[M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \right] = [1, Av + b] \stackrel{j_0^{-1}}{=} Av + b$$

e quindi $\varphi(f)$ è un'affinità

(2) è un omomorfismo

(3) è iniettiva: abbiamo visto che M è univocamente determinata da A e b

(4) è suriettiva: se voglio ottenere l'affinità $v \mapsto Av + b$, basta considerare

la proiettività indotta dalla matrice $M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right)$ \square

Oss la restrizione di f all'iperpiano all'infinito $H_0 \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$
 è descritta dalla matrice A , che è coerente con il fatto
 che H_0 si identifica con le direzioni di \mathbb{K}^n , e
 l'affinità $v \mapsto Av + b$ trasforma le direzioni tramite la matrice A

Dualità

esempio nell'equazione $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ di una retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$
 c'è una simmetria tra i coefficienti a_i e le variabili x_i
 Se fisso gli a_i (non tutti nulli, e posso anche riscalarli)
 l'equazione è l'equazione di una retta
 Se fisso gli x_i e lascio variare i coefficienti a_i ,
 descrivo l'insieme delle rette passanti per un punto dato.
 Formalmente l'equazione rimane una retta, nella variabile $[a_0, a_1, a_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$
 Questa è una manifestazione della dualità in contesto proiettivo

Se V è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dim. finita, il duale di V è $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$
 Se (v_i) è base di V , c'è una base duale associata (v_i^*) di V^* , descritta da $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

DEF. lo spazio proiettivo duale di $\mathbb{P}(V)$ è lo spazio proiettivo
 $\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}(\text{Hom}(V, \mathbb{K}))$

Oss Visto che $\dim_{\mathbb{K}} V$, $V \cong V^*$ (non canonicamente),
 quindi $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V)^*$ (non canonicamente)
 L'isomorfismo canonico $V \cong V^{**}$ induce
 un isomorfismo canonico $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V)^{**}$

proposizione C'è una bijezione naturale
 $\varphi: \mathbb{P}(V)^* \longrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$

DIMOSTRAZIONE

Definiamo $\varphi([f]) = \mathbb{P}(\text{Ker } f) \subseteq \mathbb{P}(V)$

dove $f: V \rightarrow \mathbb{K}$, $f \neq 0 \iff f$ suriettiva, quindi $\text{Ker } f$ è un iperpiano in V

- φ è ben definita, perché se $[f] = [g] \implies f = \lambda g \implies \text{Ker } f = \text{Ker } g$
 quindi $\varphi([f]) = \varphi([g])$
- φ è iniettiva: se ho $[f], [g] \in \mathbb{P}(V)^*$ t.c. $\mathbb{P}(\text{Ker } f) = \mathbb{P}(\text{Ker } g)$
 allora $\text{Ker } f = \text{Ker } g \implies f = \lambda g$ per $\lambda \in \mathbb{K}^*$
 (completando una base di $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ a base di V aggiungendo
 un vettore v , se $f(v) = \alpha$, $g(v) = \beta$, so che $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ e $f = \lambda g$ per $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$)
 Quindi $[f] = [g]$

- φ è suriettiva: se $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un iperpiano, scriviamo
 $H = \mathbb{P}(W)$ dove $W \subseteq V$ è un iperpiano
 Allora V/W ha dim 1 e fissato $V/W \cong \mathbb{K}$,
 posso prendere come $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ la composizione
 $V \rightarrow V/W \cong \mathbb{K}$
 Si ha $\text{Ker } f = W$, quindi $\varphi([f]) = \mathbb{P}(W) = H$

□

Se R è un rif. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e (v_i) è una base normalizzata di V rispetto a R , la base duale (v_i^*) induce un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}(V)^*$ (dato da $P_i = [v_i^*]$ e $P_{n+1} = [\sum_{i=0}^n v_i^*]$, dove $n = \dim V$) che si chiama **riferimento duale**, R^* , e quindi delle coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)^*$

esempio Le coordinate omogenee rispetto al rif. duale del rif. standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ della retta $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ sono proprio $[a_0, a_1, a_2]$

Analogamente le coordinate standard dell'iperpiano $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ sono $[a_0, \dots, a_n]$

Sia $S = \mathbb{P}(V)$ sottospazio proiettivo di dim k , e scriverò $S = \mathbb{P}(W)$ con $W \subseteq V$, $\dim W = k+1$ e $\dim \mathbb{P}(V) = n$
 $\text{Ann} W = \{f: V \rightarrow \mathbb{K} \mid f|_W \equiv 0\} \subseteq V^*$
 è un sottospazio vettoriale di dimensione $(n+1) - (k+1) = n-k$

DEF. Per $-1 \leq k \leq n$, definisco

$\delta_k: \{ \text{ssp proiettivi } S = \mathbb{P}(V), \dim S = k \} \longrightarrow \{ \text{ssp proiettivi } T = \mathbb{P}(V)^*, \dim T = n-k-1 \}$
 come $\delta_k(S) = \mathbb{P}(\text{Ann}(W))$ dove $S = \mathbb{P}(W)$

proposizione δ_k è biunivoca per ogni $-1 \leq k \leq n$

Oss per $k=n-1$, $\delta_{n-1}: \{ \text{iperpiani di } \mathbb{P}(V) \} \longrightarrow \{ \text{punti di } \mathbb{P}(V)^* \}$
 è l'inversa della funzione della proposizione precedente
 per $k=0$, $\delta_0: \{ \text{punti di } \mathbb{P}(V) \} \longrightarrow \{ \text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)^* \}$
 $P \longmapsto \{ H \in \mathbb{P}(V)^* \mid \text{iperpiano di } \mathbb{P}(V) \text{ t.c. } P \in H \}$
 δ_0 coincide con δ_{n-1} applicata al caso di $\mathbb{P}(V)^*$, visto che $\mathbb{P}(V)^{**} \cong \mathbb{P}(V)$

DIMOSTRAZIONE

• δ_k è iniettiva

se $\mathbb{P}(\text{Ann}(W_1)) = \mathbb{P}(\text{Ann}(W_2)) \implies \text{Ann } W_1 = \text{Ann } W_2 \subseteq V^*$
 $\implies W_1 = W_2$

(se fossero diversi, usando una base appropriata di V , potrei costruire

$f: V \rightarrow \mathbb{K}$ t.c. $f|_{W_1} \equiv 0$ ma $f|_{W_2} \neq 0$)

$\implies \mathbb{P}(W_1) = \mathbb{P}(W_2)$, che dà l'iniettività

• δ_k è suriettiva:

dato $T = \mathbb{P}(V)^*$ di dim $n-k-1$

scrivo $T = \mathbb{P}(Z)$ dove $Z \subseteq V^*$ sottospazio vettoriale di dim $n-k$

Pongo $W = \bigcap_{f \in Z} \text{Ker } f = \bigcap_{i=1}^{n-k} \text{Ker } z_i$ ((z_i) è base di Z)

Questo W ha dimensione $(n+1) - (n-k) = k+1$

e si ha $Z = \text{Ann } W$

segue che $\dim \mathbb{P}(W) = k$ e $\delta_k(\mathbb{P}(W)) = T$ □

Poniamo $\delta : \{ \text{ssp proiettivi di } \mathbb{P}(V) \} \longrightarrow \{ \text{ssp proiettivi di } \mathbb{P}(V)^* \}$
dove $\delta(S) = \delta_k(S)$ se $\dim S = k$

proposizione Siano S_1, S_2 due sottospazi. Allora:

$$(1) S_1 \subseteq S_2 \implies \delta(S_1) \supseteq \delta(S_2)$$

$$(2) \delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$$

$$(3) \delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$$

In altre parole, la dualità inverte i contenimenti e scambia intersezione e somma.

DIMOSTRAZIONE

Siano $S_1 = \mathbb{P}(W_1), S_2 = \mathbb{P}(W_2)$

$$(1) S_1 \subseteq S_2 \implies W_1 \subseteq W_2 \implies \text{Ann } W_1 \supseteq \text{Ann } W_2 \implies \mathbb{P}(\text{Ann } W_1) \supseteq \mathbb{P}(\text{Ann } W_2)$$

$$(2) [\mathfrak{f}] \in \delta(S_1) \cap \delta(S_2) \iff \mathfrak{f} \in \text{Ann } W_1 \cap \text{Ann } W_2$$

$$\iff \mathfrak{f} \in V^* \quad \mathfrak{f}|_{W_1} = 0, \mathfrak{f}|_{W_2} = 0 \iff \mathfrak{f}|_{W_1+W_2} = 0$$

$$\iff \mathfrak{f} \in \text{Ann}(W_1+W_2)$$

$$\iff [\mathfrak{f}] \in \mathbb{P}(\text{Ann}(W_1+W_2)) = \delta(\mathbb{P}(W_1+W_2)) = \delta(L(S_1, S_2))$$

(3) Si riconduce a (2) usando il fatto che tramite l'identificazione tra V e V^{**} , un sottospazio W corrisponde a $\text{Ann}(\text{Ann}(W))$, per cui $\delta \circ \delta : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)^{**} = \mathbb{P}(V)$ è l'identità.

Infatti, posto $S_i = \delta(T_i)$ (dove ora δ va da $\mathbb{P}(V)^*$ in $\mathbb{P}(V)^{**} = \mathbb{P}(V)$)

e $S_2 = \delta(T_2)$, otteniamo $\delta(S_1 \cap S_2) = \delta(\delta(T_1) \cap \delta(T_2))$

Applico (2) a $\delta(T_1) \cap \delta(T_2) = \delta(L(T_1, T_2))$, quindi

$$\delta(S_1 \cap S_2) = \delta(\delta(L(T_1, T_2))) = L(T_1, T_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$$

(da $S_i = \delta(T_i)$ otteniamo $T_i = \delta(S_i)$ poiché $\delta^2 = \text{id}$)

□

In alternativa, si poteva scaricare la dimostrazione sul fatto
 $\text{Ann}(W_1+W_2) = \text{Ann}(W_1) \cap \text{Ann}(W_2)$ e $\text{Ann}(W_1 \cap W_2) = \text{Ann } W_1 + \text{Ann } W_2$

A volte si identifica $\mathbb{P}(V)$ con $\mathbb{P}(V)^*$

Ad esempio, se $V = \mathbb{K}^n$ (per cui l'esistenza di basi canoniche determina un'identificazione $V \cong V^*$)

In questo contesto, la dualità stabilisce una corrispondenza tra i sottospazi di uno stesso spazio (appunto quando $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V)^*$ sono identificati)

principio di dualità

Sia P una proposizione che riguarda intersezioni, "somme", e contenimenti di sottospazi in $\mathbb{P}(V)$, e sia P^* la proposizione ottenuta da P tramite i seguenti scambi:

$$\begin{aligned} \subseteq &\longrightarrow \supseteq & \supseteq &\longrightarrow \subseteq \\ \cap &\longrightarrow L(\cdot, \cdot) & L(\cdot, \cdot) &\longrightarrow \cap \\ \dim = k &\longrightarrow n - k - 1 & (n = \dim \mathbb{P}(V)) \end{aligned}$$

Allora P è vera $\iff P^*$ è vera

Segue da quanto detto finora.

esempio Sia P : "In un piano proiettivo due rette distinte si intersecano esattamente in un punto,"

Se l è una retta e $\dim \mathbb{P}(V)^* = 2$, la duale $\delta(l) = l^*$

ha dimensione $n-k-1 = 2-1-1=0$, per cui l^* è un punto

Invece, il duale di un punto ha $\dim 2-0-1=1$, cioè è una retta.

Quindi P^* : "In un piano proiettivo, due punti distinti generano esattamente una retta."

esempio P : "In $\mathbb{P}^3(K)$, siano l_1, l_2 rette e $P \in \mathbb{P}^3(K)$ t.c. $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ e $P \notin l_1 \cup l_2$, allora $\exists!$ retta $l \in \mathbb{P}^3(K)$ t.c. $l \cap l_1 \neq \emptyset, l \cap l_2 \neq \emptyset, P \in l$."

Abbiamo già visto che P è vera

Il duale di una retta ha $\dim 3-1-1=1$, ed è una retta.

Il duale di un punto è un piano ($3-0-1=2$)

$l_1 \cap l_2 = \emptyset \Rightarrow L(l_1^*, l_2^*) = \emptyset^* = \mathbb{P}^3(K)$ e, per Grassmann, questo è equivalente a $l_1^* \cap l_2^* = \emptyset$

$P \notin l_1 \Rightarrow \{P\} \not\subseteq l_1 \Rightarrow \{P\}^* \not\subseteq l_1^*$

e analogamente $\{P\}^* \not\subseteq l_2^*$

L'ipotesi di P^* è "In $\mathbb{P}^3(K)^*$ siano l_1^*, l_2^* , $Q = \{P\}^*$ due rette e un piano t.c. $l_1^* \cap l_2^* = \emptyset$ e $l_i^* \not\subseteq Q$ $i=1,2$."

Dualizziamo la tesi, otteniamo:

" $\exists!$ retta l^* t.c. $Q \supseteq l^*, l_1^* \cap l_2^* \neq \emptyset, l_1^* \cap l_2^* \neq \emptyset$,"

dove abbiamo usato che la duale di $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ è $l_1^* \cap l_2^* = \emptyset$

Riassumendo, P^* : "In $\mathbb{P}^3(K)^*$ siano l_1^*, l_2^* , $Q = \{P\}^*$ due rette e un piano t.c. $l_1^* \cap l_2^* = \emptyset$ e $l_i^* \not\subseteq Q$ $i=1,2$, allora

$\exists!$ retta l^* t.c. $Q \supseteq l^*, l_1^* \cap l_2^* \neq \emptyset, l_1^* \cap l_2^* \neq \emptyset$,"

proposizione Sia $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottospazio proiettivo. Allora $\delta(S) = \{H \in \mathbb{P}(V) \text{ iperpiani}, S \subseteq H\} \subseteq \mathbb{P}(V)^*$

DIMOSTRAZIONE

Sia $S = \mathbb{P}(W)$ Allora $\delta(S) = \mathbb{P}(\text{Ann}(W))$

Ricordiamo anche che $\mathbb{P}(V)^* \cong \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$

tramite $[\varphi] = \mathbb{P}(\text{Ker } \varphi)$

Dunque $[\varphi] \in \delta(S) \iff \varphi \in \text{Ann}(W) \setminus \{0\} \iff W \subseteq \text{Ker } \varphi$

$\iff \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(\text{Ker } \varphi) \iff S \subseteq \text{iperpiano associato a } [\varphi]$ \square

$\delta(S) =$ sistema lineare di iperpiani di centro $S =$
 $= \{H \in \mathbb{P}(V) \text{ iperpiano}, S \subseteq H\}$

Un sistema lineare di dimensione 1 si chiama fascio

($\dim \delta(S) = 1 \iff \dim S = n-2, n = \dim \mathbb{P}(V)$)

esempio L'insieme delle rette passanti per un fissato punto $P_0 \in \mathbb{P}^2(K)$ è un fascio di rette

esempio

Se $\mathbb{P}^2(K) = U_0 \cup H_0 = \{x_0 \neq 0\} \cup \{x_0 = 0\}$, con $U_0 \cong K^2$

Sia $Q \in \mathbb{P}^2(K)$ e sia \mathcal{F} il fascio di centro Q .

Sia poi $\mathcal{F} = \{J_0^{-1}(r), r \in \mathcal{F}\}$, dove $J_0: K^2 \rightarrow U_0$ è la carta affine, cioè \mathcal{F} è l'insieme delle pareti affini delle rette di \mathcal{F}

Se $Q \in U_0$, \mathcal{F} è un fascio proprio di rette affini: è l'insieme delle rette affini passanti per $J_0^{-1}(Q)$

Se $Q \notin U_0$, \mathcal{F} è un fascio improprio di rette parallele (le cui chiusure proiettive si intersecano in Q)

Oss Se $[f], [g] \in \mathbb{P}(V)^*$ generano un fascio, tutti gli altri elementi del fascio sono della forma $[\lambda f + \mu g]$, λ, μ non entrambi nulli. Concretamente se $f(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2$ e $g(x_0, x_1, x_2) = a'x_0 + b'x_1 + c'x_2$ sono equazioni di rette distinte passanti per Q in $\mathbb{P}^2(K)$, allora qualsiasi altra retta passante per Q ha equazione $(\lambda f + \mu g)(x_0, x_1, x_2) = 0$ per qualche λ, μ non entrambi nulli.

Oss Poiché ogni sottospazio di $\mathbb{P}(V)^*$ è della forma $\mathcal{S}(S)$ per qualche $S = \mathbb{P}(V)$ sottospazio, ogni sottospazio di iperpiani di $\mathbb{P}(V)^*$ è proprio l'insieme degli iperpiani che contengono un fissato S .

Proiettività duale

Sia $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ un isomorfismo proiettivo

Allora $f = [\varphi]$ con $\varphi: V \rightarrow W$ lineare

e $\exists \varphi^*: W^* \rightarrow V^*$ mappa duale, definita da $\varphi^*(\alpha) = \alpha \circ \varphi \quad \forall \alpha \in W^*$

La proiettività duale è

$f^*: \mathbb{P}(W)^* \rightarrow \mathbb{P}(V)^*$ indotta da φ^*

(è ben definita perché $(\lambda \varphi)^* = \lambda \varphi^*$, e se φ è invertibile, lo è anche φ^*)

Possiamo interpretare f^* come una mappa sugli iperpiani di $\mathbb{P}(W)$,

cioè dagli iperpiani di $\mathbb{P}(W)$ in quelli di $\mathbb{P}(V)$

È facile rendersi conto che $f^*(H) = f^{-1}(H)$

Fissati un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$, abbiamo basi normalizzate e coordinate proiettive su $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$, che inducono basi duali su V^* e W^* , e dunque coordinate omogenee anche su $\mathbb{P}(V)^*$ e $\mathbb{P}(W)^*$

In queste coordinate, se f è rappresentata dalla matrice A ,

f^* è rappresentata dalla matrice A^T

Birapporto

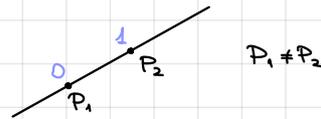
A^n spazio affine su \mathbb{K}

Un riferimento affine è $P_1, \dots, P_n, P_{n+1} \in A^n$ non contenuti in un iperpiano
induce delle coordinate affini

Nel caso $n=1$ ottengo una retta affine A^1

Le coordinate affini identificano

$$A^1 \cong \mathbb{K}$$



DEF $P_1, P_2, P_3 \in A^1$ con $P_1 \neq P_2$

Il rapporto semplice $[P_1, P_2, P_3] :=$ le coordinate di P_3 rispetto al riferimento affine dato da P_1, P_2



$$z = [P_1, P_2, P_3]$$

proposizione In qualsiasi riferimento affine

$$[P_1, P_2, P_3] = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{con } z_i \in \mathbb{K} \text{ coordinata di } P_i$$

DIMOSTRAZIONE

(1) Se il riferimento è (P_1, P_2) :

$$[P_1, P_2, P_3] = \frac{z_3 - 0}{1 - 0} = z_3$$

(2) da formula è invariante per trasformazione affine $f(z) = kz + b, k \neq 0$

$$z_i \rightarrow kz_i + b$$

$$\text{Sostituisco: } \frac{(kz_3 + b) - (kz_1 + b)}{(kz_2 + b) - (kz_1 + b)} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

Concludo perché due riferimenti affini (P_1, P_2) e (Q_1, Q_2)

sono sempre collegati da una trasformazione affine

$$f(z) = kz + b \text{ tale che } f(P_i) = Q_i$$

□

corollario Se $f: A^1 \rightarrow A^1$ è un'affinità,

$$[P_1, P_2, P_3] = [f(P_1), f(P_2), f(P_3)]$$

Nel caso proiettivo:

Un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ è $P_1, \dots, P_{n+2} + c.$

$n+1$ di questi non stanno mai in un iperpiano proiettivo

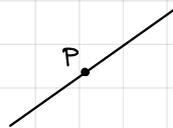
Retta proiettiva: il riferimento proiettivo dato da P_1, P_2, P_3 distinti

induce delle coordinate proiettive $[\lambda, \mu]$

P_1 ha come coordinate $[1, 0]$,

P_2 ha come coordinate $[0, 1]$

P_3 ha come coordinate $[1, 1]$



DEF $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ retta proiettiva

P_1, P_2, P_3 distinti

Il birapporto $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ è

$$\beta = \frac{\mu}{\lambda} \quad \text{dove le coordinate di } P_4 \text{ sono } [\lambda, \mu] \text{ rispetto al riferimento } P_1, P_2, P_3$$

- esempio
- Se $P_4 = P_1$, $\beta = 0$
 - Se $P_4 = P_2$, $\beta = \infty$
 - Se $P_4 = P_3$, $\beta = 1$

Oss $\beta(P_1, P_2, P_3, \cdot) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ è una bijezione

corollario $\beta \in \{0, 1, \infty\} \Leftrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4$ non sono distinti

proposizione Siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ retta proiettiva, con P_1, P_2, P_3 distinti
 Sia fissato un riferimento proiettivo
 Siano $[\lambda_i, \mu_i]$ le coordinate di P_i .

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}$$

DIMOSTRAZIONE

(1) Questa formula è ben definita

$[\lambda_i, \mu_i] = [k\lambda_i, k\mu_i]$ si semplifica il fattore

(2) La formula è invariante per proiettività

$A \in \text{PGL}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\} / \sim$ dove $A \sim kA \quad \forall k \neq 0$

$A[\lambda, \mu] = [A_1(\lambda, \mu), A_2(\lambda, \mu)]$
 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda + b\mu \\ c\lambda + d\mu \end{pmatrix}$

$$\frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}} \xrightarrow{\substack{\lambda_i \mapsto A_1(\lambda_i, \mu_i) \\ \mu_i \mapsto A_2(\lambda_i, \mu_i)}} \frac{\begin{vmatrix} A_1(\lambda_1, \mu_1) & A_1(\lambda_4, \mu_4) \\ A_2(\lambda_1, \mu_1) & A_2(\lambda_4, \mu_4) \end{vmatrix} \cdot \dots}{\dots} = \frac{\begin{vmatrix} A_1(\lambda_1, \mu_1) & A_1(\lambda_4, \mu_4) \\ A_2(\lambda_1, \mu_1) & A_2(\lambda_4, \mu_4) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1(\lambda_2, \mu_2) & A_1(\lambda_3, \mu_3) \\ A_2(\lambda_2, \mu_2) & A_2(\lambda_3, \mu_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1(\lambda_2, \mu_2) & A_1(\lambda_4, \mu_4) \\ A_2(\lambda_2, \mu_2) & A_2(\lambda_4, \mu_4) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1(\lambda_1, \mu_1) & A_1(\lambda_3, \mu_3) \\ A_2(\lambda_1, \mu_1) & A_2(\lambda_3, \mu_3) \end{vmatrix}} =$$

$$\stackrel{\text{Binet}}{=} \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix}}$$

(3) Se usiamo il riferimento proiettivo P_1, P_2, P_3 è vera:

$[\lambda_1, \mu_1] = [1, 0], [\lambda_2, \mu_2] = [0, 1], [\lambda_3, \mu_3] = [1, 1], [\lambda_4, \mu_4]$

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_4 \\ 0 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \lambda_4 \\ 1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_4 \cdot (-1)}{-\lambda_4 \cdot 1} = \frac{\mu_4}{\lambda_4}$$

si conclude perché qualsiasi cambiamento di riferimento proiettivo cambia le coordinate attraverso $A \in \text{PGL}_2(\mathbb{K})$ □

Oss Il fatto che il membro a destra non cambia $\forall A$
 ci dice anche che β è un invariante per proiettività

teorema Se $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$, $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}(W)$ rette proiettive con P_1, P_2, P_3 distinti, Q_1, Q_2, Q_3 distinti,
 $\exists f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ proiettività t.c. $f(P_i) = Q_i \quad i=1, \dots, 4$
 se e solo se $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo P_1, P_2, P_3 rif. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

Q_1, Q_2, Q_3 rif. proiettivo di $\mathbb{P}(W)$

Sappiamo che $\exists! g: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ t.c. $g(P_i) = Q_i \quad i=1, 2, 3$

Dobbiamo mostrare che $g(P_4) = Q_4 \iff \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

Con questi riferimenti proiettivi, $g = [I]$.

$$P_4 = [\lambda, \mu], \quad \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\mu}{\lambda}; \quad Q_4 = [\lambda', \mu'], \quad \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{\mu'}{\lambda'}$$

$$g(P_4) = [\lambda, \mu] = Q_4 \iff \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu'}{\lambda'} \iff \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \quad \square$$

Oss Scegliamo $z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$: $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}$

Parentesi: Una proiettività di $\mathbb{P}(V)$ retta proiettiva, dopo aver fissato un rif. proiettivo, è determinata da $A \in \text{PG}_2(\mathbb{K}) \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bc \neq 0$

$$A([\lambda, \mu]) = [a\lambda + b\mu, c\lambda + d\mu]$$

$$z = \frac{\mu}{\lambda} \rightsquigarrow [\lambda, \mu] \mapsto [a\lambda + b\mu, c\lambda + d\mu] \rightsquigarrow \frac{c\lambda + d\mu}{a\lambda + b\mu} = \frac{c + dz}{a + bz}$$

Quindi $z \mapsto \frac{c + dz}{a + bz}$ è una **trasformazione lineare fratta**

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si chiama **trasformazione di Möbius**

Funziona anche se $z = \infty \mapsto \frac{d}{b}$

$$z = -\frac{a}{b} \mapsto \infty$$

Sono bigezioni $\mathbb{K} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$

esempio $z \mapsto \frac{1}{z}$

Cosa succede se permuti i 4 punti in $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}$?
 Le permutazioni di $V_4 = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ non cambiano β

Usando tutte le possibili permutazioni, cioè le classi S_4/V_4 , si ottengono i possibili valori di β :

$$S = \left\{ \beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1 - \beta}, \frac{\beta - 1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta - 1} \right\}$$

Sia $\text{char } \mathbb{K} \neq 0$ e P_1, P_2, P_3, P_4 distinti $\iff \beta \neq 0, 1, \infty$

Si definisce $j(\beta) = \frac{(\beta^2 - \beta + 1)^3}{\beta^2(\beta - 1)^2} \in \mathbb{K}$

proposizione $\beta' \in S \iff j(\beta) = j(\beta')$
 $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$

DIMOSTRAZIONE

(\implies) conto noioso

$$(\Leftarrow) \quad q(x) = (x^2 - x + 1)^3 - j(\beta)x^2(x - 1)^2$$

Se i valori di S sono distinti, sono le radici di q

Infatti $j(\beta') = j(\beta) \iff q(\beta') = 0$ (perché $\deg q = 6$)

In questo caso ho concluso

I soli casi in cui ci sono ripetizioni:

$$\beta = -1, 2, 1/2 : j(\beta) = \frac{2\pi}{4}$$

$$-3, -3^2 \text{ con } \zeta = e^{\frac{2\pi i}{4}} : j(\beta) = 0$$

In questi casi (facendo i conti)

(1) $q(x) = (x+1)^2(x-2)^2(x-\frac{1}{2})^2$ non ci sono altre soluzioni

(2) $q(x) = (x+\zeta)^3(x+\zeta^2)^3$ □

DEF $j(\beta) := j(\beta(P_1, P_2, P_3, P_4))$ e' il modulo dei 4 punti distinti P_1, P_2, P_3, P_4

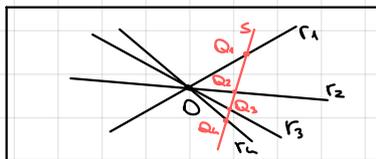
teorema $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V), Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}(W)$ rette proiettive
 quaterne distinte con $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}
 $\exists!$ $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ proiettività t.c.
 $f(\{P_1, P_2, P_3, P_4\}) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \iff$ hanno lo stesso modulo

DIMOSTRAZIONE

Due quaterne hanno lo stesso modulo \iff hanno lo stesso birapporto dopo aver permutato una delle due quaterne opportunamente

$\iff \exists f$ che manda $\{P_i\}$ in $\{Q_i\}$ per il teorema visto prima □

Applicazioni: $\dim \mathbb{P}(V) = 2$
 r_1, r_2, r_3 distinte



I duali di r_i sono punti $P_i \in \mathbb{P}(V)^*$

Il duale di O e' una retta $s \in \mathbb{P}(V)^*$ che contiene i P_i

DEF $\beta(r_1, r_2, r_3, r_4) := \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$

esercizio $s \subseteq \mathbb{P}(V)$ piano proiettivo t.c. $O \in s$
 $\beta(r_1, r_2, r_3, r_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

corollario $\beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ non dipende da s

E' chiaro perché le quaterne così ottenute sono collegate tra loro tramite proiettività.

Oss $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_1 - z_3)}$

Se $z_4 = \infty$, $\beta(z_1, z_2, z_3, \infty) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$
 e' il rapporto semplice $[z_1, z_2, z_3]$

coniche proiettive

Sia $\text{char } K \neq 2$

$K_2[x_0, x_1, x_2] = \{ \text{polinomi omogenei di grado 2 nelle variabili } x_0, x_1, x_2 \}$
è uno spazio vettoriale con base $x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2$
quindi ha dimensione 6

DEF. Una conica proiettiva è

$$C = [p] \in \mathbb{P}K_2[x_0, x_1, x_2]$$

Il supporto di C è il sottoinsieme di $\mathbb{P}^2(K)$

$$V(C) = \{x = [x_0, x_1, x_2] : p(x) = 0\}$$

Oss In generale, p non è una funzione $\mathbb{P}^2(K) \rightarrow K$

ma è ben definito il luogo $V(C)$ in cui $p(x) = 0$

$$x = [x_0, x_1, x_2] = [\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2] \quad \lambda \neq 0$$

$$p(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 p(x_0, x_1, x_2) \quad \text{perché } p \text{ è omogeneo}$$

Inoltre se sostituisco p con $\lambda p, \lambda \neq 0$, il luogo di zeri non cambia

DEF. $f: \mathbb{P}^2(K) \rightarrow \mathbb{P}^2(K)$ proiettività

Data $C = [p]$ conica nel dominio, definisco $f(C)$ conica nel codominio nel modo seguente

Sia $M \in GL_3(K)$ che realizza f

$$f(C) := \text{conica con polinomio } p \circ M^{-1}$$

proposizione $f(V(C)) = V(f(C))$

DIMOSTRAZIONE

$$\text{Tesi: } [x] \in V(f(C)) \iff [x] \in f(V(C))$$

$$[x] \in V(f(C)) \iff (p \circ M^{-1})(x) = 0, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff p(M^{-1}x) = 0$$

$$\iff [M^{-1}x] \in V(p) \iff f^{-1}([x]) \in V(p) \iff [x] \in f(V(C)) \quad \square$$

DEF. Due coniche C e C' in $\mathbb{P}^2(K)$ sono proiettivamente equivalenti

se $\exists f: \mathbb{P}^2(K) \rightarrow \mathbb{P}^2(K)$ proiettività t.c. $C' = f(C)$

Oss f, g proiettività di $\mathbb{P}^2(K)$ allora $f(g(C)) = (f \circ g)(C)$

$$\text{Infatti } f(g(C)) = f([p \circ G^{-1}]) = [p \circ G^{-1} \circ F^{-1}] = [p \circ (F \circ G)^{-1}] = (f \circ g)(C)$$

Grazie all'osservazione, è ovvio che essere proiettivamente equivalenti è una relazione d'equivalenza per le coniche

Concretamente: $p(x) = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$ con a, b, c, d, e, f non tutti nulli

$$A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix} \quad p(x) = {}^t x A x \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Se una proiettività f è rappresentata da una matrice $M \in PGL_3(K)$, allora:

se C è rappresentata da $p(x) = {}^t x A x$, allora

$f(C)$ è rappresentata da ${}^t x {}^t M^{-1} A M^{-1} x$

$$\text{Infatti: } {}^t x {}^t M^{-1} A M^{-1} x = {}^t (M^{-1}x) A (M^{-1}x) = (p \circ M^{-1})(x)$$

corollario $A, A' \in GL_3(K)$ simmetriche rappresentano due coniche proiettivamente equivalenti se e solo se $\exists M \in GL_3(K), \lambda \in K^*$ t.c. $A' = \lambda^{-1} M A M$

$A' \sim A$ sono proiettivamente congruenti

C conica $C = [p]$ rappresentata da $[A] \in PS_3(K)$ dove $S_3(K) = \{ \text{matrici simmetriche } 3 \times 3 \} =$

C' conica $C' = [p']$ rappresentata da $[A'] \in PS_3(K)$ $= K_2[x_0, x_1, x_2]$

C e C' sono proiettivamente equivalenti $\Leftrightarrow \exists M \in GL_3(K) \exists \lambda \in K^*$ t.c. $A' = \lambda^{-1} M A M$

Dall'algebra lineare:

• se $K = \mathbb{C}$, $A' \sim A \Leftrightarrow \text{rk} A = \text{rk} A'$

• se $K = \mathbb{R}$, $A \sim A' \Leftrightarrow s(A) = s(A')$ a meno di scambiare i_+ e i_-

teorema ($K = \mathbb{C}$) Ogni conica proiettiva su \mathbb{C} è proiettivamente equivalente a una di queste:

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (rk 3) $A = I$

(2) $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (rk 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(3) $x_0^2 = 0$ (rk 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(1) è detta non degenera

(2) è detta degenera

$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$

Il supporto è l'unione di due rette distinte

(3) è detta doppiamente degenera

$x_0^2 = x_0 \cdot x_0 = 0$

Il supporto è l'unione di due rette coincidenti

teorema ($K = \mathbb{R}$) Ogni conica proiettiva su \mathbb{R} è proiettivamente equivalente a una di queste:

(1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (3, 0, 0) $\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} \text{rk } 3$

(2) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ (2, 1, 0)

(3) $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (2, 0, 1) $\left. \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array} \right\} \text{rk } 2$

(4) $x_0^2 - x_1^2 = 0$ (1, 1, 1)

(5) $x_0^2 = 0$ (1, 0, 2) rk 1

(1) è detta non degenera con $V = \emptyset$

(2) è detta non degenera con $V \neq \emptyset$

(3) è detta degenera con $V = \{[0, 0, 1]\}$

(4) è detta degenera

$x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1)$

(5) è detta doppiamente degenera

$C = [P]$ conica proiettiva $(K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$

t.c. $X_0 \nmid P$

$$\mathbb{P}^2(K) = U_0 \cup H_0 \quad U_0 \cong \mathbb{K}^2$$

$$\begin{matrix} \uparrow X_0 \neq 0 & \uparrow X_0 = 0 \\ \mathbb{P}^2(K) = \mathbb{K}^2 \cup H_0 \end{matrix}$$

DEF. La parte affine di C è la conica affine $f(x,y) = p(1,x,y)$
(polinomio di 2° grado in x,y a meno di costante)

Oss $\deg f = 2$ perché $X_0 \nmid P$

esempio $p = 2x^2 + 3y^2 - 4x_0x_2 + 5x_1x_2$
 $f = 2 + 3x^2 - 4y + 5xy$

Oss $V(f) = V(C) \cap \mathbb{K}^2$

DIMOSTRAZIONE

$$(x,y) \in V(f) \iff f(x,y) = 0 \iff p(1,x,y) = 0$$

$$\iff [1,x,y] \in V(P) \quad \square$$

DEF. Data C conica affine $C = [f]$, $f(x,y)$ di 2° grado non necessariamente omogeneo,
il completamento proiettivo di C è la conica proiettiva \bar{C}
rappresentata da $p(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ polinomio omogeneo di 2° grado

esempio $f(x,y) = 3 + x - y + xy + y^2$
 $p(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \left(3 + \frac{x_1}{x_0} - \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_1}{x_0} \frac{x_2}{x_0} + y^2 \right) = 3x_0^2 + x_0x_1 - x_0x_2 + x_1x_2 + x_2^2$

Oss Questa operazione è l'inversa della precedente

Richiamo: $f(x,y)$ affine si descrive come

$$f(x,y) = (1 \ x \ y) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad A \text{ simmetrica} \quad A = \begin{pmatrix} c & b \\ b & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

cioè $f(x,y) = ax^2 + by^2 + px + qy + r$ con $c=r$, $b = \begin{pmatrix} p/2 \\ q/2 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & r/2 \\ r/2 & b \end{pmatrix}$

f è non degenera se $\text{rk } A = 3$

se f è non degenera e non vuota, allora è:

- un'ellisse se $\det \tilde{A} > 0$
- una parabola se $\det \tilde{A} = 0$
- un'iperbole se $\det \tilde{A} < 0$

Il completamento proiettivo \bar{C} di C è descritto
dalla stessa matrice A

Quindi $\text{rk } \bar{C} = \text{rk } C$

Quindi se C è iperbole/ellisse/parabola, allora

\bar{C} è una conica non degenera non vuota

\Rightarrow è unica a meno di proiettività

DEF. I punti all'infinito di C sono i punti in $\bar{C} \cap H_0$

Teorema C conica affine non degenerata e non vuota
 C è una ellisse/parabola/iperbola \iff
 i punti all'infinito sono rispettivamente 0/1/2

DIMOSTRAZIONE

$$f(x,y) = (x \ y) \begin{pmatrix} c & \epsilon b \\ b & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$p(x_0, x_1, x_2) = (x_0 \ x_1 \ x_2) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_0 = \{x_0 = 0\}$$

I punti all'infinito sono i punti $[x_0, x_1, x_2]$ che soddisfanno

$$\begin{cases} (x_0 \ x_1 \ x_2) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (x_1 \ x_2) \tilde{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

\tilde{A} identifica una forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^2

I punti all'infinito corrispondono alle rette isotrope di \tilde{A}

Ci sono 3 casi:

- se $\sigma(\tilde{A}) = (2, 0, 0)$ o $(0, 2, 0)$ non ci sono punti all'infinito
 $\iff \det \tilde{A} > 0$: ellisse
- se $\sigma(\tilde{A}) = (1, 1, 0)$, $\tilde{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha 2 rette isotrope
 $\iff \det \tilde{A} < 0$: iperbola
- se $\sigma(\tilde{A}) = (1, 0, 1)$ o $(0, 1, 1)$, $\tilde{A} \equiv \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha 1 retta isotropa
 $\iff \det \tilde{A} = 0$: parabola

Oss: $(0, 0, 2)$ non può presentarsi se $\text{rk} A = 3$

□

Tangenti a una conica

Supponiamo che $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, anche se diverse cose valgono in generale

Sia $C = [F]$ una conica proiettiva in $\mathbb{P}^2(K)$ e r una retta in $\mathbb{P}^2(K)$

proposizione Se $|V(C) \cap r| < +\infty$, allora $|V(C) \cap r| \leq 2$
 e se $K = \mathbb{C}$, si ha $|V(C) \cap r| \geq 1$

DIMOSTRAZIONE

Parametriamo i punti di r come $[\lambda\sigma + \mu\omega]$ dove $P = [\sigma], Q = [\omega], P \neq Q, P, Q \in r$ e $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(K)$

I punti di $V(C) \cap r$ corrispondono in questa parametrizzazione alle

"radici omogenee" del polinomio (punto $[\lambda, \mu]$ che annulla il polinomio)

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda\sigma + \mu\omega) = F(\lambda\sigma_0 + \mu\omega_0, \lambda\sigma_1 + \mu\omega_1, \lambda\sigma_2 + \mu\omega_2)$$

$$\text{dove } \sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2), \omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)$$

Il polinomio $G(\lambda, \mu)$ è omogeneo di grado 2 in λ, μ .

Se $G(\lambda, \mu)$ fosse il polinomio nullo, avrei che $r \subseteq V(C)$,

contro l'ipotesi $|V(C) \cap r| < +\infty$ (sto usando che $|K| = +\infty$)

Donque G non è il polinomio nullo

Vediamo che ha al più due radici omogenee

Diciamo $G(\lambda, \mu) = A\lambda^2 + B\lambda\mu + C\mu^2$ con $A, B, C \in K$ non tutti nulli

Idea: deomogeneizziamo rispetto a λ

- Se $C=0$ allora $G(\lambda, \mu) = A\lambda^2 + B\lambda\mu = \lambda(A\lambda + B\mu)$
e questo ha al più due radici $[0, 1]$ e $[-B, A]$
- Se $C \neq 0$, allora $[0, 1]$ non è radice di $G(\lambda, \mu)$ e posso "dividere per λ ":
pongo $z = \frac{\mu}{\lambda}$, sostituendo in G , trovo $g(z) = A + Bz + Cz^2$
Questo ha al più due radici in \mathbb{K} , e ne ha almeno una se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Queste (al più) due radici $z_1, z_2 \in \mathbb{K}$, danno (al più) due radici
omogenee $[1, z_1], [1, z_2]$ (e ce n'è almeno una se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) □

Vediamo che il caso in cui $|V(C) \cap r| \geq 3$ può verificarsi solo se C è degenera
(una matrice simmetrica che la rappresenta è degenera, $\det = 0$)

DEF. Una retta di equazione $l=0$ (polinomio omogeneo di grado 1 in x_0, x_1, x_2)
si dice **componente di una conica** $C=[F]$ se $l|F$
(quindi F è prodotto di due fattori lineari)

Una conica $C=[F]$ si dice **irriducibile** se F è un polinomio irriducibile

Oss Se r è componente di C , allora $r \subseteq V(C)$, e dunque $|V(C) \cap r| = +\infty$
e $V(C)$ è unione di due rette, eventualmente coincidenti

proposizione Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , allora se una conica è riducibile, è anche degenera.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è vero anche il viceversa

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) Suppongo che $F = l_1 \cdot l_2$ dove $[F] = C$ e l_i sono polinomi omogenei di grado 1
Scriviamo $l_1(x) = {}^t a \cdot x = {}^t x \cdot a$ dove $x = (x_0, x_1, x_2)$, $a = (a_0, a_1, a_2)$

$$l_2(x) = {}^t a' \cdot x$$

$$\text{Ora } F(x) = l_1(x) l_2(x) = ({}^t x \cdot a) ({}^t a' \cdot x) = {}^t x \cdot \overset{M}{(a \cdot {}^t a')} \cdot x$$

$$M = a \cdot {}^t a' = \begin{pmatrix} a_0 & & \\ a_1 & & \\ a_2 & & \end{pmatrix} (a_0 \ a_1 \ a_2) = (a \cdot a_0 \mid a \cdot a_1 \mid a \cdot a_2)$$

Potrebbe non essere simmetrica.

Espandendo l'equazione della conica e scrivendo la matrice simmetrica
associata, risulta la matrice $M + M^t = (a \cdot a_0 + a' \cdot a_0 \mid a \cdot a_1 + a' \cdot a_1 \mid a \cdot a_2 + a' \cdot a_2)$

Risulta $\det(M + M^t) = 0$ perché le sue colonne stanno in $\langle a, a' \rangle$

(\Leftarrow) Voglio usare la classificazione proiettiva

Sia il fatto che C sia degenera (o meno) che il fatto che C sia
riducibile (o meno) sono invarianti per equivalenza proiettiva.

(chiaro per degenera, e se $F = l_1 \cdot l_2$ e $[F] = C$, allora un'equazione
di $f(C)$, dove $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una proiettività rappresentata da M ,
è $F \circ M^{-1} = (l_1 \circ M^{-1})(l_2 \circ M^{-1})$)

Applicando la proiettività, posso supporre C sia una tra

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_0^2 + x_1^2 = 0, \quad x_0^2 = 0$$

(non degenera) (degenera)

Quelle degenera sono riducibili: $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1)$ e $x_0^2 = x_0 \cdot x_0$ □

Oss Se R non vale degenerare \Rightarrow riducibile

Ad esempio, $x_2^2 + x_1^2 = 0$ è degenerare ma irriducibile

proposizione Se $C = [F]$ è una conica e $r \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ è una retta e $|V(C) \cap r| \geq 3$, allora r è una componente di C .

DIMOSTRAZIONE

Ripetendo la dim della prop. precedente,

il polinomio $G(\lambda, \mu) = F(\lambda v + \mu w)$ deve essere il polinomio nullo

Applicando una proiettività, posso supporre che r abbia equazione $x_0 = 0$

e che $P = [0, 1, 0]$, $Q = [0, 0, 1]$

(posso cambiare coordinate perché $\ell(F) \Rightarrow (\ell \circ M^{-1}) \mid (F \circ M^{-1})$)

Se in queste coordinate, la conica ha equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$$

$$\text{allora } G(\lambda, \mu) = F(\lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)) = F(0, \lambda, \mu) =$$

$$= b\lambda^2 + c\mu^2 + f\lambda\mu$$

Se G è il polinomio nullo, segue $b = c = f = 0$, e

$$\text{L'equazione } F \text{ diventa } F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 = x_0(ax_0 + dx_1 + ex_2)$$

che mostra che $x_0 \mid F$, e quindi r è componente di C \square

corollario Se C è non degenerare, allora $|V(C) \cap r| \leq 2 \quad \forall r \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ retta.

DEF. Sia C una conica non degenerare

Una retta r è **tangente** a C in un punto $P \in V(C)$ se $r \cap V(C) = \{P\}$

Avvertenza: questa definizione vale per coniche non degeneri

Oss $V(C) \cap r = \{P\}$ equivale a dire che il polinomio $G(\lambda, \mu)$ ha una radice doppia corrispondente a P , cioè è della forma $(\lambda\mu_0 - \mu\lambda_0)^2 \cdot k$

Il fatto che ci sia una radice doppia è la formalizzazione algebrica della tangenza e si generalizza bene a coniche degeneri, e a curve di grado superiore

Proposizione Sia C una conica non degenerata.

Per ogni $P \in V(C)$ esiste un'unica tangente τ_P alla conica $C = [M]$, $M \in S_3(K)$, nel punto $P = [v]$.

La tangente ha equazione ${}^t(M \cdot v) \cdot x = 0$

(la formula si può riscrivere come ${}^t(\nabla F(v)) \cdot x = 0$, visto che $\nabla F(v) = M \cdot v, \dots$)

DIMOSTRAZIONE

Dimostro che posso applicare una proiettività per scegliere coordinate comode.

Se $f: \mathbb{P}^2(K) \rightarrow \mathbb{P}^2(K)$ è una proiettività rappresentata da $A \in GL_3(K)$.

• r è tangente a C in $P \in V(C)$ se e solo se $f(r)$ è tangente

a $f(C)$ ($V(f(C)) = f(V(C))$) in $f(P) \in V(f(C))$

• l'equazione di $f(C)$ è $F \circ A^{-1}$ e la matrice associata è ${}^t A^{-1} M A^{-1} = M'$

Se r è la retta di equazione ${}^t(M \cdot v) \cdot x = 0$, allora $f(r)$ ha equazione

$${}^t(M \cdot v) \cdot A^{-1} \cdot x = 0$$

$${}^t v {}^t M A^{-1} x = {}^t v M A^{-1} x$$

Il punto $f(P)$ sarà rappresentato dal vettore $v' = A \cdot v$, cioè $v = A^{-1} v'$

da cui ${}^t(A^{-1} v' | M A^{-1}) \cdot x = 0$, ossia ${}^t v' {}^t A^{-1} M A^{-1} x = {}^t v' M' x = 0$ equazione di $f(r)$

questa equazione è esattamente l'equazione dell'enunciato, relativa

alla conica $f(C)$ e al punto $f(P)$

Applicando una proiettività, posso supporre $V(C)$ contenga

$[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$, e che $P = [1, 0, 0]$

(basta dire che in $V(C)$ ci sono due punti non allineati con $P \in V(C)$).

Questo è vero perché $V(C)$ ha infiniti punti se è $\neq \emptyset$ e C è non degenerata,

e $V(C)$ non può contenere tre punti allineati, altrimenti la retta sarebbe componente di C per quanto visto, contro le ipotesi).

Se $F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$

Il passaggio per $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, implica che $a = b = c = 0$

Quindi $F(x_0, x_1, x_2) = dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2$

dove $d, e, f \neq 0$, altrimenti la conica sarebbe riducibile

Una matrice che rappresenta C è $M = \begin{pmatrix} 0 & d/2 & e/2 \\ d/2 & 0 & f/2 \\ e/2 & f/2 & 0 \end{pmatrix}$

$P = [1, 0, 0]$, $v = (1, 0, 0)$

La tesi è che ci sia una sola retta tangente, e che sia la retta

di equazione $(M \cdot v) = \begin{pmatrix} d/2 \\ e/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{2} x_1 + \frac{e}{2} x_2 = 0 \iff dx_1 + ex_2 = 0$$

Per dimostrarlo consideriamo la generica retta per P $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$ $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(K)$

e imponiamo che l'intersezione con $V(C)$ sia 1 punto.

$$\begin{cases} F = 0 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 = 0 \end{cases}$$

• se $\lambda = 0$, segue che $\mu \neq 0$, e quindi $x_2 = 0$;

$F = 0$ dà $dx_0x_1 = 0$, e ho 2 soluzioni distinte

$[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$ (no tangenza)

• posso supporre che $\lambda \neq 0$, e ricavare $x_1 = -\frac{\mu}{\lambda} x_2$

e sostituire in $F = 0$, trovando

$$dx_0 \left(-\frac{\mu}{\lambda} x_2\right) + ex_0x_2 + f x_2 \left(-\frac{\mu}{\lambda} x_2\right) = 0$$

$$x_2 \left(\left(-\frac{d\mu}{\lambda} + e\right) x_0 - f \frac{\mu}{\lambda} x_2 \right) = 0$$

c'è una radice doppia $\iff -\frac{d\mu}{\lambda} + e = 0$

$$\iff -d\mu + e\lambda = 0 \iff [\lambda, \mu] = [d, e]$$

□

DEF. (1) Se $F = l_1 \cdot l_2$, con l_1, l_2 non proporzionali (rette distinte), si dice che r è **tangente** a $[F]$ in P se

$$r = S_1 \text{ e } P \in S_1 \setminus S_2$$

$$r = S_2 \text{ e } P \in S_2 \setminus S_1$$

r qualsiasi se $P \in S_1 \cap S_2$

(2) Se $F = l^2$, qualsiasi retta è **tangente** a $C = [F]$ in $P \in V(C)$

(3) ($K = \mathbb{R}$) Se $V(C)$ è un punto, qualsiasi retta per $P \in V(C)$ è **tangente** a C

Oss Si può verificare che anche in questi casi è equivalente a chiedere che $G(\lambda, \mu)$ abbia una radice almeno doppia nel punto

Polarità

Sia C una conica non degenera in $\mathbb{P}^2(K)$ e $M \in S_3(K)$ una matrice associata a C . Sia $P = [v] \in \mathbb{P}^2(K)$

DEF. La **retta polare** di P rispetto a C è

la retta $\text{pol}(P) \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ di equazione

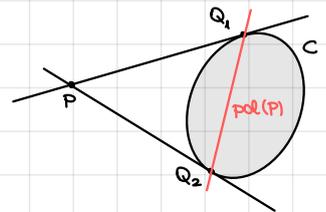
$${}^t(M \cdot v) \cdot x = 0 \quad (\text{o } {}^t v M x = 0)$$

In altre parole, è la retta di coordinate $[M \cdot v]$ nel duale $\mathbb{P}^2(K)^*$

Dato che C è non degenera, M ha rango massimo ed è invertibile, dunque ciascuna retta $r \subseteq \mathbb{P}^2(K)$ è $\text{pol}(P_r)$ per un unico $P_r \in \mathbb{P}^2(K)$, che si chiama **polo** di r rispetto a C

proposizione $P, Q \in \mathbb{P}^2(K)$, C conica non degenera

- (1) $P \in \text{pol}(Q) \iff Q \in \text{pol}(P)$ (reciprocità)
- (2) $P \in V(C) \implies \text{pol}(P) = \tau_P$
- (3) $\text{pol}(P) \cap V(C) = \{Q \in V(C) \mid P \in \tau_Q\}$



DIMOSTRAZIONE

(1) Se $P = [v], Q = [w]$, allora

$\text{pol}(P)$ ha equazione ${}^t M v \cdot x = 0$

$\text{pol}(Q)$ ha equazione ${}^t w M x = 0$

$$P \in \text{pol}(Q) \iff {}^t w M v = 0 \iff {}^t v M w = 0 \iff Q \in \text{pol}(P)$$

(2) è una conseguenza immediata del fatto che

se $P \in V(C)$ e $P = [v]$, l'equazione di τ_P

$$\text{è } {}^t (M v) \cdot x = 0$$

$$(3) \text{pol}(P) \cap V(C) \ni Q \iff Q \in V(C) \wedge Q \in \text{pol}(P) \stackrel{(1)}{\iff} Q \in V(C) \wedge P \in \text{pol}(Q)$$

$$\stackrel{(2)}{\iff} Q \in V(C) \wedge P \in \tau_Q$$

□

esercizio Se $|\text{pol}(P) \cap V(C)| = 1$, allora $P \in V(C)$

Segue che se $K = \mathbb{C}$ e $P \notin V(C)$, allora esistono esattamente due tangenti a C passanti per P

(su \mathbb{R} non vale: ad esempio, se C è una circonferenza e P è un punto del disco, allora $|V(C) \cap \text{pol}(P)| = 0$)

Se C è una conica non degenera

Consideriamo la funzione

$$V(C) \longrightarrow \mathbb{P}^2(K)$$

$$P \longmapsto \tau_P$$

il supporto di

Segue da quanto visto che l'immagine di questa funzione è una conica in $\mathbb{P}^2(K)^*$, che si chiama conica duale di C

Basta notare che questa funzione è la restrizione dell'isomorfismo proiettivo

$$\text{pol} : \mathbb{P}^2(K) \longrightarrow \mathbb{P}^2(K)^*$$

$$P \longmapsto \text{pol}(P)$$

(in coordinate è descritta dalla matrice M , per definizione di $\text{pol}(P)$...)

La conica duale è quindi $\text{pol}(C)$ ("trasformata" di C rispetto

all'isomorfismo proiettivo pol)

Si vede che la conica duale C^* è rappresentata da M^{-1}

sistemi lineari di coniche

Lo spazio delle coniche è $\mathbb{P}K_2[x_0, x_1, x_2] \cong \mathbb{P}^5$ fissando una base

DEF. Un sistema lineare di coniche è un sottospazio proiettivo $\Lambda \subseteq \mathbb{P}K_2[x_0, x_1, x_2]$

Un tale Λ si dice fascio di coniche se $\dim \Lambda = 1$

Per definizione, se $\dim \Lambda = k$ ($-1 \leq k \leq 5$), le coniche in Λ

si scrivono tutte come $[\sum_{i=0}^k \lambda_i C_i]$ dove $[\lambda_i] \in \mathbb{P}^k(K)$

e $[C_i]$ sono un riferimento proiettivo di Λ .

Se Λ è un fascio, ogni conica di Λ ha un'equazione della forma

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0 \quad \text{dove } [\lambda_1, \lambda_2] \in \mathbb{P}^1(K) \text{ e } [G_1] \neq [G_2] \text{ sono due punti di } \Lambda$$

esempio Se $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^2(K)$ sono in posizione generale,

l'insieme delle coniche $\{C \mid P_i \in C \forall i\}$ è un fascio.

Questo dice che la conica generica del fascio ha equazione

$$\lambda l_1 l_2 + \mu l'_1 l'_2 = 0 \quad \text{dove } l_1, l_2, l'_1, l'_2 \text{ sono equazioni di rette}$$

passanti per due dei quattro punti (scelte opportunamente)

esempio Anche imporre la tangenza in un punto dato è una condizione lineare nei coefficienti

DEF. Se Λ è un sistema lineare di coniche,

$P \in \mathbb{P}^2(K)$ si dice punto base di Λ se appartiene a tutte le coniche di Λ

Oss I punti base possono essere infiniti, anche

nel caso in cui Λ è un fascio

Ad esempio $\lambda x_0 x_1 + \mu x_0 x_2 = 0$

ha come punti base la retta $\{x_0 = 0\}$

TOPOLOGIA GENERALE

spazi metrici

DEF. Uno spazio metrico è una coppia (X, d) , dove X è un insieme e $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ è una distanza, tale che:

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

esempio su \mathbb{R}^n ci sono tante distanze

- (1) $d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
- (2) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- (3) $d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$

da verificare che queste sono distanze si può fare usando il fatto che sono indotte da norme

DEF. Dato V spazio vettoriale, una norma è una funzione $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, +\infty)$ tale che

- (1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Una norma induce una distanza $d(x, y) = \|x - y\|$

Ad esempio, d_e è indotta da $\|v\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$

esempio $X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$

Anche su X ci sono tante distanze:

- (1) $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$
- (2) $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt}$
- (3) $d_\infty(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0, 1]\}$

Vedremo che le distanze su \mathbb{R}^n sono topologicamente equivalenti, mentre nel caso degli spazi di funzioni non è vero.

esempio Dato qualsiasi insieme X , c'è una distanza su X , detta distanza discreta, definita come

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Questa è una distanza:

(1), (2): chiari

(3): $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Se $x = z$: $0 \leq d(x, y) + d(y, z)$ è verificata

Altrimenti $x \neq z$: $1 \leq d(x, y) + d(y, z)$ e

non può essere sia $y = x$ e $y = z$, quindi è verificata

DEF. Siano (X, d) , (Y, d') spazi metrici.

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice **embedding isometrico** se

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

Oss Un embedding isometrico è iniettivo

$$f(x) = f(y) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) = 0 = d(x, y) \Rightarrow x = y$$

DEF. Un'isometria è un embedding isometrico surgettivo (quindi bigettivo)

È immediato vedere che l'inversa di un'isometria è un'isometria.

L'identità è un'isometria.

La composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico

Il gruppo delle isometrie si denota $\text{Isom}(X, d)$

esempio $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, d_e) = \{ x \mapsto Ax + b, \text{ dove } A \in O(n) \}$

Sia (X, d) uno spazio metrico

Per $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, poniamo

$$B(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X \mid d(x_0, x) < \varepsilon \}$$
 la palla aperta di centro x_0 e raggio ε

DEF. Siano (X, d) , (Y, d') spazi metrici.

$f: X \rightarrow Y$ è **continua in x_0** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

f si dice **continua** se è continua in tutti i punti di X .

DEF. $A \subseteq X$ è **aperto** (per la distanza d) se

$$\forall x_0 \in A \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } B(x_0, \varepsilon) \subseteq A$$

Lemma Le palle aperte sono sottoinsiemi aperti

DIMOSTRAZIONE

Fissiamo $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, e mostriamo che $B(x_0, \varepsilon) \subseteq X$ è aperto.

Dato $x \in B(x_0, \varepsilon)$, devo vedere che $\exists \delta > 0$ t.c. $B(x, \delta) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$

Prendiamo $\delta = \varepsilon - d(x, x_0)$: questo funziona.

Infatti, se $y \in B(x, \delta)$, cioè $d(y, x) < \delta$, devo vedere che $y \in B(x_0, \varepsilon)$,

cioè che $d(y, x_0) < \varepsilon$. Ma

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \delta + d(x, x_0) = \varepsilon - d(x, x_0) + d(x, x_0) = \varepsilon$$

□

teorema $f: X \rightarrow Y$ funzione tra spazi metrici
 è continua $\Leftrightarrow f^{-1}(A)$ è aperto in X per ogni aperto $A \subseteq Y$.

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) Sia $A \subseteq Y$ aperto. Devo vedere che $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dato $x_0 \in f^{-1}(A)$, devo mostrare che $\exists \delta > 0$ t.c. $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$

Visto che A è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq A$

Per continuità di f in x_0 , $\exists \delta > 0$ t.c. $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq A$

$$\Leftrightarrow B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$$

(\Leftarrow) Sto supponendo che $f^{-1}(A) \subseteq X$ sia aperto per ogni $A \subseteq Y$ aperto

e fissato $x_0 \in X$, voglio vedere che f è continua in x_0 , cioè

che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

Ora $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq Y$ è aperto, dunque $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subseteq X$ è aperto

e $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$

Segue che $\exists \delta > 0$ t.c. $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$

che equivale a $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ □

esempio

Se d è la distanza discreta su X ,

tutti i sottoinsiemi di X sono aperti perché

$B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$, quindi qualsiasi $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$,

esiste una palla aperta centrata in x_0 contenuta in A

Segue che $f: X \rightarrow Y$ è una funzione verso un altro spazio metrico,

allora f è continua.

proposizione La famiglia degli aperti di uno spazio metrico soddisfa

(1) \emptyset e X sono aperti

(2) A, B aperti $\Rightarrow A \cap B$ è aperto

(3) se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di X ,
 allora $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq X$ è aperto

DIMOSTRAZIONE

(1) chiara

(2) Se $x_0 \in A \cap B$, poiché A è aperto, $\exists \varepsilon_1 > 0$ t.c. $B(x_0, \varepsilon_1) \subseteq A$

e poiché B è aperto, $\exists \varepsilon_2 > 0$ t.c. $B(x_0, \varepsilon_2) \subseteq B$.

Se $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ allora $B(x_0, \varepsilon) \subseteq A \cap B \Rightarrow A \cap B$ è aperto

(perché se $\varepsilon \leq \varepsilon'$, allora $B(x_0, \varepsilon) \subseteq B(x_0, \varepsilon')$)

(3) Sia $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$, quindi $x_0 \in A_{i_0}$ per qualche $i_0 \in I$.

Visto che A_{i_0} è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$

quindi $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto □

Oss Segue che l'intersezione finita di aperti è aperta, ma questo non vale per intersezioni infinite

esempio Su (\mathbb{R}, d_e) , $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$, che non è aperto

spazi topologici

DEF. Uno spazio topologico è una coppia (X, τ) dove X è un insieme e $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ (detta topologia; i suoi elementi si dicono aperti) che soddisfa i seguenti assiomi:

- (1) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$
- (2) se $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$
- (3) se $\{A_i\}_{i \in I}$ sono elementi di τ , allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

esempio Una distanza su X induce una topologia su X

DEF. Una topologia si dice metrizzabile se esiste una distanza che la induce.

esempio $\tau = \mathcal{P}(X)$ si chiama topologia discreta ed è metrizzabile ed è indotta dalla distanza discreta

esempio $\tau = \{\emptyset, X\}$ è la topologia indiscreta

Oss Se $|X| \geq 2$, allora la topologia indiscreta non è metrizzabile. Se per assurdo avesse una distanza d che la induce, prendo $x \neq y \in X$, e pongo $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x, y)$ e noto che $B(x, \varepsilon)$ e $B(y, \varepsilon)$ sono aperti di X , non vuoti, disgiunti. Assurdo perché l'unico aperto non vuoto della topologia indiscreta è X .

DEF. Se (X, τ) è uno spazio topologico, un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice chiuso se $X \setminus C$ è aperto.

Una topologia può anche essere descritta dicendo chi sono i chiusi, che devono soddisfare

- (1) \emptyset, X sono chiusi
- (2) se C_1, C_2 sono chiusi, allora $C_1 \cup C_2$ è chiuso
- (3) se C_i è chiuso $\forall i \in I$, allora $\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq X$ è un chiuso

Oss Se un sottoinsieme non è aperto, non è detto che sia chiuso.

esempio $[a, b)$ su $(\mathbb{R}, d_\varepsilon)$ non è né aperto né chiuso.

confronto tra topologie

DEF. Siano τ_1, τ_2 due topologie nello stesso insieme X , si dice che τ_1 è più fine di τ_2 se $\tau_2 \subseteq \tau_1$, cioè se tutti gli aperti di τ_2 sono aperti di τ_1 .

Questo definisce un ordine parziale sulle topologie, che ha un massimo (la topologia discreta) e un minimo (la topologia indiscreta).

Idea: topologie più fini "distinguono meglio i punti".

Nel caso delle topologie metrizzabili c'è una condizione naturale che si riflette sul fatto che una topologia sia più fine di un'altra.

proposizione Siano d_1, d_2 distanze su X , e τ_1, τ_2 le topologie indotte.
Se $\exists k > 0$ t.c. $d_1 \leq kd_2$
allora τ_2 è più fine di τ_1

DIMOSTRAZIONE

Devo vedere che ogni aperto di τ_1 è aperto di τ_2

Sia $A \subseteq X$ un aperto per τ_1 , e $x_0 \in A$. Devo vedere

che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B_{d_2}(x_0, \varepsilon) \subseteq A$

So che $\exists \delta > 0$ t.c. $B_{d_1}(x_0, \delta) \subseteq A$

$y \in B_{d_1}(x_0, \delta)$ soddisfa $d_1(x_0, y) < \delta$

Prendo $\varepsilon = \frac{\delta}{k}$ e dico che $B_{d_2}(x_0, \frac{\delta}{k}) \subseteq B_{d_1}(x_0, \delta) \subseteq A$

Infatti se $y \in B_{d_2}(x_0, \frac{\delta}{k})$: $d_2(x_0, y) < \frac{\delta}{k}$.

Inoltre $d_1(x_0, y) \leq k d_2(x_0, y) < \delta$ □

DEF. Due distanze d_1, d_2 su X sono **topologicamente equivalenti** se inducono la stessa topologia.

corollario Siano d_1, d_2 distanze su X t.c.
 $\exists h, k, d_1 \leq kd_2$ e $d_2 \leq hd_1$
allora d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti

DIMOSTRAZIONE

Segue da quanto visto e da $\tau_2 \subseteq \tau_1, \tau_1 \subseteq \tau_2 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2$ □

corollario Le distanze d_1, d_2, d_∞ su \mathbb{R}^n
sono topologicamente equivalenti

DIMOSTRAZIONE

Le distanze sono tutte indotte da norme:

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad \|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \|v\|_\infty = \max \{ |v_i| \mid i=1, \dots, n \}$$

Mostriamo che

$$\|v\|_1 \leq \sqrt{n} \|v\|_2 \leq n \|v\|_\infty \leq n \|v\|_1$$

poi si conclude.

La prima segue dalla disuguaglianza tra media aritmetica e media quadratica:

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| = n \left(\frac{\sum_{i=1}^n |v_i|}{n} \right) \leq n \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n}} = \sqrt{n} \|v\|_2$$

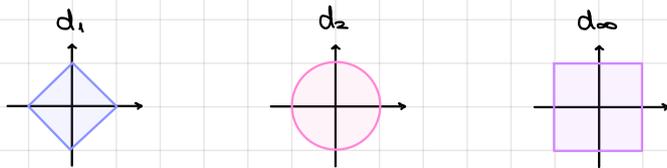
$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \leq \sqrt{n \|v\|_\infty^2} = \sqrt{n} \|v\|_\infty$$

Infine

$$\|v\|_\infty = \max \{ |v_i| \} \leq \sum_{i=1}^n |v_i| = \|v\|_1$$
 □

Donque d_1, d_2, d_∞ inducono la stessa topologia anche se sono distanze diverse.

Le palle unitarie in \mathbb{R}^2 sono:



FUNZIONI CONTINUE

DEF. Siamo $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ spazi topologici.

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice **continua** se

$$\forall A \in \tau_2 \quad f^{-1}(A) \in \tau_1$$

cioè la preimmagine di un aperto è aperta.

Idea: gli aperti sono quegli insiemi che contengono un intorno di ogni loro punto. Le funzioni continue, se pensiamo gli intorni come gli insiemi di punti vicini, mandano punti vicini in punti vicini.

DEF. Sia $p \in X$. Un **intorno** di p in X è un sottoinsieme $U \subseteq X$ tale che \exists un aperto A di X con $p \in A \subseteq U$.

Lemma $A \subseteq X$ è aperto $\Leftrightarrow A$ è intorno di ogni suo punto

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) $\forall p \in A$ $p \in A \subseteq A$ e A è aperto, dunque A è un intorno di p

(\Leftarrow) $\forall p \in A$, poiché A è un intorno di p , \exists un aperto B_p t.c. $p \in B_p \subseteq A$

Ma allora $A = \bigcup_{p \in A} B_p$ è unione di aperti, perciò A è aperto \square

DEF. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è **continua in p** se

\forall intorno V di $f(p)$ \exists intorno U di p tale che $f(U) \subseteq V$

proposizione $f: X \rightarrow Y$ è continua $\Leftrightarrow \forall p \in X$, f è continua in p

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) Suppongo f continua e fisso $p \in X$

Se V è un intorno di $f(p)$ in Y , $\exists B$ aperto di Y t.c. $f(p) \in B \subseteq V$

Allora $p \in f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(V)$ e $f^{-1}(B)$ è aperto perché f è continua.

Donque $f^{-1}(V)$ è un intorno di p e chiaramente $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ per cui $f^{-1}(V)$ è l'intorno cercato.

(\Leftarrow) Sia $B \subseteq Y$ aperto. Devo mostrare che $f^{-1}(B)$ è aperto, cioè è intorno di ogni suo punto. Sia $p \in f^{-1}(B)$.

Poiché B è un intorno di $f(p)$ (essendo aperto) e f è continua in p ,

$\exists U_p$ intorno di p in X con $f(U_p) \subseteq B$. Ma allora $U_p \subseteq f^{-1}(B)$,

e dunque $f^{-1}(B)$ è un intorno di p (un sovrainsieme di un intorno è un intorno)

Perciò $f^{-1}(B)$ è intorno di ogni suo punto, quindi è aperto. \square

Passando ai complementari, è ovvio che una funzione è continua se e solo se rimanda chiusi in chiusi.

Fatti: (1) $\text{id} : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ è continua.

(2) siano $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ continue, allora $g \circ f: X \rightarrow Z$ è continua.

Infatti, se $A \subseteq Z$ è aperto, $g^{-1}(A) \subseteq Y$ è aperto per continuità di g , e $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (f \circ g)^{-1}(A)$ è aperto per continuità di f .

Def. $f: X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo se è continua e $\exists g: Y \rightarrow X$ continua tale che $f \circ g = \text{id}_Y, g \circ f = \text{id}_X$.

Attenzione: una funzione continua e bigettiva può non essere un omeomorfismo.

Questo capita se l'inversa non è continua.

esempio se τ_1 e τ_2 sono due topologie su X

$\text{Id} : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ è continua $\Leftrightarrow \tau_2 \subseteq \tau_1$, cioè τ_2 è meno fine di τ_1 .

Perciò $\text{Id} : (X, \tau_{\text{disc}}) \rightarrow (X, \tau_{\text{indisc}})$ è continua,

ma la sua inversa non lo è (se $|X| \geq 2$).

Fatto: essere omeomorfi è una relazione di equivalenza tra spazi topologici (cioè se $X \cong Y, Y \cong Z$, allora $X \cong Z$).

Esempi

(1) \mathbb{R}^n, τ_e topologia euclidea, indotta dalla distanza euclidea.

(2) X insieme qualsiasi, τ topologia cofinita, i cui chiusi sono X e i sottoinsiemi finiti di X .

Controlliamo che sia una topologia:

(i) $X \in \tau$ per definizione, $\emptyset \in \tau$ perché è finito.

(ii) se C_1, C_2 sono chiusi, allora $C_1 \cup C_2$ è tutto X (se $C_1 = X$ o $C_2 = X$) o è finito, in quanto unione di finiti, dunque è chiuso.

(iii) se $C_i, i \in I$, sono chiusi, o sono tutti uguali a X

(e allora $\bigcap_{i \in I} C_i = X$ chiusa) o $\exists i_0 \in I$ t.c. C_{i_0} è finito,

e allora $\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq C_{i_0}$ è finita.

In realtà, se α è una qualsiasi cardinalità infinita,

esiste la topologia $\text{co-}\alpha$, i cui chiusi sono X e i sottoinsiemi di cardinalità $\leq \alpha$.

(ad esempio, la topologia co-numerabile)

(3) Topologia di Zariski

Sia K un campo. La topologia di Zariski su K^n è

la topologia i cui chiusi sono luoghi di zeri di famiglie di polinomi in $K[x_1, \dots, x_n]$

Notiamo che, se $\mathcal{F} = \{p_i, i \in I\}$ è una famiglia di polinomi, e $Q \in K^n$

verifica $p_i(Q) = 0 \forall i \in I$ allora $f(Q) = 0 \forall f \in I(\mathcal{F})$ (ideale generato dalla famiglia \mathcal{F})

Infatti, se $f = a_1 p_1 + \dots + a_k p_k$ con $p_i \in \mathcal{F}$, allora

$$f(Q) = a_1(Q)p_1(Q) + \dots + a_k(Q)p_k(Q) = 0$$

Donque i chiusi possono essere definiti anche come luoghi

di zeri di ideali di $K[x_1, \dots, x_n]$

Se I è tale ideale, si pone $V(I) = \{Q \in K^n \text{ t.c. } f(Q) = 0 \forall f \in I\}$ (varietà di I)

Verifichiamo che è una topologia:

(i) $\emptyset = V(K[x_1, \dots, x_n])$ in quanto il polinomio costante 1 si annulla in \emptyset

$$K^n = V(\{0\})$$

(ii) $C_1 = V(I_1), C_2 = V(I_2)$

$C_1 \cup C_2 = V(I_1 \cdot I_2)$ dove $I_1 \cdot I_2$ è l'ideale generato da $\{f \cdot g, f \in I_1, g \in I_2\}$

$C_1 \cup C_2 \subseteq V(I_1 \cdot I_2)$: infatti, se $f \in I_1, g \in I_2$, f si annulla su C_1 , g si annulla su C_2

quindi $f \cdot g$ si annulla su $C_1 \cup C_2$. Donque tutti i generatori di $I_1 \cdot I_2$

si annullano su $C_1 \cup C_2$ e perciò $C_1 \cup C_2 \subseteq V(I_1 \cdot I_2)$

Se invece $Q \notin C_1 \cup C_2$, allora $\exists f \in I_1$ t.c. $f(Q) \neq 0$, $\exists g \in I_2$ t.c. $g(Q) \neq 0$.

Ma allora $f \cdot g(Q) \neq 0$ e $Q \notin V(I_1 \cdot I_2)$.

(iii) se $C_i = V(I_i), i \in I$

$$\text{allora } \bigcap_{i \in I} C_i = V\left(\sum_{i \in I} I_i\right)$$

esempio (i) su \mathbb{R}^n , la topologia di Zariski è meno fine di quella euclidea, ed è diversa. Infatti i polinomi come funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} con le topologie euclidee sono continui.

Perciò, se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è un polinomio, $f^{-1}(\{0\})$ è un chiuso euclideo, in quanto $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ è un chiuso euclideo. Poiché intersezione qualsiasi di chiusi è chiusa,

$V(I)$ è un chiuso euclideo $\forall I$ ideale.

Donque tutti i chiusi di Zariski sono chiusi euclidei

Non tutti i chiusi euclidei sono chiusi di Zariski:

ad esempio, la palla chiusa $\mathbb{B}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ non è un chiuso di Zariski

perché l'unico polinomio che si annulla su di essa è il polinomio nullo

(ii) su \mathbb{R} , la topologia di Zariski è la topologia cofinita

chiusura e parte interna

DEF Sia X uno spazio topologico, e sia $Z \subseteq X$

la **chiusura** \bar{Z} di Z è il più piccolo chiuso che contiene Z .

Si tratta di una buona definizione in quanto l'intersezione di chiusi è chiusa,

perciò
$$\bar{Z} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supseteq Z}} C$$

DEF La **parte interna** $\text{int}(Z)$ o $\overset{\circ}{Z}$ di Z è il più grande aperto contenuto in Z .

Anche questo è ben definito perché unione di aperti è aperta,

perciò
$$\overset{\circ}{Z} = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq Z}} A$$

Per definizione (o quasi), Z è un intorno di x_0 se e solo se $x_0 \in \overset{\circ}{Z}$

esempio (i) $X = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{Q}$

$\overset{\circ}{Z} = \emptyset$ perché \mathbb{Q} non contiene un aperto di \mathbb{R}

$\bar{Z} = \mathbb{R}$ in quanto $\text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ (sempre perché $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non contiene aperti di \mathbb{R})

e $\bar{Z} = X \setminus \text{int}(X \setminus Z)$, cioè \bar{Z} e $\text{int}(X \setminus Z)$ danno una partizione di X ,

in quanto i chiusi che contengono Z sono in biiezione

con gli aperti contenuti in $X \setminus Z$, per cui il più piccolo chiuso che

contiene Z è il complementare del più grande aperto contenuto in $X \setminus Z$

(ii) $X = \mathbb{R}$, $Z = [0, 1)$

$\overset{\circ}{Z} = (0, 1)$, $\bar{Z} = [0, 1]$

Per definizione, vale $\overset{\circ}{Z} \subseteq Z \subseteq \bar{Z}$ e se $A \subseteq B$, allora $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ e $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

Inoltre Z è aperto $\iff Z = \overset{\circ}{Z}$

Z è chiuso $\iff Z = \bar{Z}$

Lemma $p \in \bar{Z} \iff \forall U$ intorno di p , $U \cap Z \neq \emptyset$

DIMOSTRAZIONE

Vediamo che $p \notin \bar{Z} \iff \exists U$ intorno di p , $U \cap Z = \emptyset$

Ma questo è facile perché $\exists U$ intorno di p $U \cap Z = \emptyset$ se e solo se

$\exists U$ intorno di p $U \subseteq X \setminus Z \iff p \in \text{int}(X \setminus Z) \iff p \notin \bar{Z}$ □

DEF Un punto $p \in X$ si dice **aderente** a Z se e solo se $p \in \bar{Z}$

Un punto $p \in X$ si dice di **accumulazione** per Z se e solo se $p \in \overline{Z \setminus \{p\}}$,

cioè se ogni intorno di p interseca Z in punti diversi da p

Fatto: se p è aderente a Z ma $p \notin Z$, allora p è di accumulazione per Z

in quanto $p \in \bar{Z} = \overline{Z \setminus \{p\}}$

Ma un punto di accumulazione può appartenere a Z

esempio $X = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{N} \cup (-2, -1)$

$\bar{Z} = [-2, -1] \cup \mathbb{N}$

I punti di accumulazione di Z sono $[-2, -1]$

DEF $Z \subseteq X$ si dice denso se $\bar{Z} = X$

Poiché $\bar{Z} = X \setminus \text{int}(X \setminus Z)$, Z è denso se e solo se $\text{int}(X \setminus Z) = \emptyset$,
se e solo se $X \setminus Z$ non contiene un aperto non vuoto, ossia
ogni aperto non vuoto di X interseca Z

Lemma Siano $Z_1, Z_2 \subseteq X$. Allora
 $\overline{Z_1 \cup Z_2} = \bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2$ e $\text{int}(Z_1 \cap Z_2) = \text{int}(Z_1) \cap \text{int}(Z_2)$

DIMOSTRAZIONE

Basta vedere $\overline{Z_1 \cup Z_2} = \bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2$, in quanto il secondo enunciato
segue passando ai complementari.

Poiché $Z_1 \subseteq Z_1 \cup Z_2$, $\bar{Z}_1 \subseteq \overline{Z_1 \cup Z_2}$ e analogamente $\bar{Z}_2 \subseteq \overline{Z_1 \cup Z_2}$
per cui $\bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2 \subseteq \overline{Z_1 \cup Z_2}$ (questo sarebbe vero anche per unioni infinite)
Viceversa $\overline{Z_1 \cup Z_2}$ è un chiuso, in quanto unione di due chiusi, e
contiene $Z_1 \cup Z_2$, dunque per minimalità della chiusura
 $\overline{Z_1 \cup Z_2} \subseteq \bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2$

□

Se I è infinito, non è vero in generale che

$$\bigcup_{i \in I} \bar{Z}_i = \overline{\bigcup_{i \in I} Z_i}$$

Abbiamo osservato che \subseteq è sempre vera, ma ad esempio

$$I = \mathbb{Q}, \quad \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \overline{\{q\}} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \mathbb{Q} \quad \text{mentre} \quad \overline{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

basì e prebasì

Lemma Siano $\tau_i, i \in I$, topologie su uno stesso insieme X .
Allora $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ è una topologia su X .

DIMOSTRAZIONE

$$(1) \quad \emptyset \in \tau_i \quad \forall i \Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i \in I} \tau_i = \tau$$

$$X \in \tau_i \quad \forall i \Rightarrow X \in \bigcap_{i \in I} \tau_i = \tau$$

(2) Se $A_j, j \in J$ sono elementi di τ , per definizione

$$\forall j \in J \quad A_j \in \tau_i \quad \forall i \in I$$

Ma allora, fissato $i \in I$, $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_i$ in quanto τ_i è una topologia.

$$\text{Donque} \quad \bigcup_{j \in J} A_j \in \bigcap_{i \in I} \tau_i = \tau$$

(3) Analogamente

□

Corollario Data una famiglia qualsiasi di topologie τ_i su X ,
esiste la più fine tra le topologie meno fini di tutte le τ_i
ed è $\bigcap_{i \in I} \tau_i$

corollario Data una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi $S_i \subseteq X, i \in I$, esiste la topologia meno fine che contiene tutti gli S_i .
Tale topologia si chiama topologia generata da $\{S_i\}_{i \in I}$

DIMOSTRAZIONE

Siano $\{\tau_j, j \in J\}$ le topologie che contengono gli S_i .

C'è almeno una: la topologia discreta.

Sia $\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$

Per il lemma, τ è una topologia, contiene tutti gli S_i

ed è la meno fine con questa proprietà

(per costruzione è contenuta in una qualsiasi topologia che contiene tutti gli S_i) \square

Questa definizione non è costruttiva.

def. Sia (X, τ) uno spazio topologico.

Una **base** di τ è un sottoinsieme $B \subseteq \tau$ tale che

$\forall A \subseteq X$ aperto $\exists B' \subseteq B$ t.c. $A = \bigcup_{V \in B'} V$

cioè ogni aperto di τ è unione di elementi della base

esempio X spazio metrico

una base di X è data da tutte le palle aperte di X

Lemma Sia $\Omega \subseteq (0, +\infty)$ un sottoinsieme tale che

$\forall \varepsilon > 0 \exists R \in \Omega$ con $0 < R < \varepsilon$

Sia X uno spazio metrico e sia $Z \subseteq X$ un sottoinsieme denso.

Allora $B = \{B(z, R), z \in Z, R \in \Omega\}$ è una base della topologia di X

DIMOSTRAZIONE

È chiaro che $B \subseteq \tau$, dove τ è la topologia indotta da d .

Sia A un aperto e $x_0 \in A$. Per concludere,

basta trovare $B_{x_0} \in B$ t.c. $x_0 \in B_{x_0} \subseteq A$

(e a quel punto avremmo $A = \bigcup_{x_0 \in A} B_{x_0}$)

Devo perciò trovare $z \in Z, R \in \Omega$ t.c. $x_0 \in B(z, R) \subseteq A$.

Poiché A è aperto, $\exists \bar{R} > 0$ t.c. $B(x_0, \bar{R}) \subseteq A$

Per definizione di Ω , $\exists R \in \Omega$ t.c. $0 < R < \frac{\bar{R}}{3}$

Poiché Z è denso in X , ogni palla aperta centrata in x_0

interseca Z , per cui esiste $z_0 \in Z$ t.c. $d(x_0, z_0) < R$

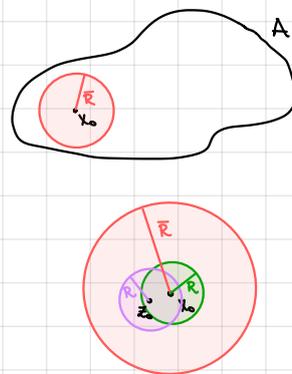
Sia $B = B(z_0, R) \in B$ ($z_0 \in Z, R \in \Omega$)

Poiché $d(x_0, z_0) < R$, $x_0 \in B$

Inoltre $\forall p \in B$, $d(x_0, p) < d(x_0, z_0) + d(z_0, p) < R + R = 2R < \frac{2}{3}\bar{R} < \bar{R}$

dunque $x_0 \in B \subseteq B(x_0, \bar{R}) \subseteq A$

\square



proposizione X insieme. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una base di una qualche topologia di X se e solo se

- (1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$
 (2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \exists B' \in \mathcal{B} \text{ t.c. } B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) segue dalla definizione di base, in quanto X è sempre aperto e se B_1, B_2 sono elementi di base di una topologia τ , essi sono aperti per τ , dunque anche $B_1 \cap B_2 \in \tau$

(\Leftarrow) Sia $\tau = \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B, B' \in \mathcal{B} \}$. Per concludere, basta vedere che τ è una topologia: a quel punto \mathcal{B} sarebbe base di τ .

(1) $\emptyset \in \tau$ (basta prendere $B' = \emptyset$)

$X \in \tau$ perché per ipotesi $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(2) se $\{A_i\}_{i \in I}$ verifica $A_i \in \tau \forall i \in I$,

allora $\forall i \in I \exists B_i \in \mathcal{B} \text{ t.c. } A_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$

Se $\bar{B} = \bigcup_{i \in I} B_i$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B \right) = \bigcup_{B \in \bar{\mathcal{B}}} B \in \tau$.

(3) se $A_1, A_2 \in \tau$, allora $A_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$, $A_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_2} B'$
 per cui $A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \right) \cap \left(\bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B' \right) = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_1 \\ B' \in \mathcal{B}_2}} B \cap B'$

Per ipotesi (2), $B \cap B'$ è unione di elementi di \mathcal{B} ,
 per cui lo è anche $A_1 \cap A_2$ □

La definizione di base mostra anche che se \mathcal{B} è una base di τ , allora τ è generata da \mathcal{B} , in quanto τ è chiaramente la più piccola topologia che contiene \mathcal{B} .

DEF. Sia (X, τ) uno spazio topologico.

Una **prebase** \mathcal{P} di τ è un sottoinsieme di aperti $\mathcal{P} \subseteq \tau$ tale che

$\mathcal{B} = \{ P_1 \cap \dots \cap P_k, k \in \mathbb{N}, P_i \in \mathcal{P} \}$ è una base di τ

esempio Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

Allora $\mathcal{P} = \{ (-\infty, a), a \in \mathbb{R} \} \cup \{ (b, +\infty), b \in \mathbb{R} \}$ è una prebase

Infatti gli elementi di \mathcal{P} sono aperti e

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ si ha $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = (-\infty, x_0 + \varepsilon) \cap (x_0 - \varepsilon, +\infty)$

Oss Se $\mathcal{B} \subseteq \tau$ è una base e $\bar{\mathcal{B}} \subseteq \tau$, allora anche $\bar{\mathcal{B}}$ è una base
 Analogamente per la prebase

proposizione X insieme, $P = \{S_i, i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora
P genera la topologia $\tau \iff \mathcal{P} \cup \{X\}$ è una prebase di τ

DIMOSTRAZIONE

(\implies) sia τ la topologia generata da P , e sia

$B = \{\text{intersezioni finite di elementi di } P \cup \{X\}\}$

Dico che B è base di una topologia τ' .

Per una proposizione precedente, basta verificare

che $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ (vero perché $X \in B$) e che

se $B_1, B_2 \in B$, allora $B_1 \cap B_2$ è unione di elementi di B ,

vero perché se B_1, B_2 sono intersezione finite di elementi di $\mathcal{P} \cup \{X\}$

anche $B_1 \cap B_2$ lo è.

Devo verificare $\tau = \tau'$. Poiché τ' contiene gli elementi di P ,

contiene anche la topologia generata da P , dunque $\tau' \supseteq \tau$.

D'altronde ogni elemento di B , essendo intersezione finita

di elementi di $\mathcal{P} \cup \{X\}$, appartiene necessariamente a τ ,

e allora $\tau' \subseteq \tau$.

(\impliedby) Se $\mathcal{P} \cup \{X\}$ è prebase di τ , allora τ contiene P ed è chiaramente
la più piccola topologia con tale proprietà, perché per definizione
di prebase ogni elemento di τ è unione arbitraria di intersezioni
finite di elementi di $\mathcal{P} \cup \{X\}$, e pertanto appartiene
a qualsiasi topologia che contiene P . □

corollario da topologia generata da $\{S_i, i \in I\}$ è data
da X e da tutti gli insiemi che sono unioni
arbitrarie di intersezioni finite di S_i .

proposizione Sia $f: X \rightarrow Y$. Allora sono fatti equivalenti:

(1) f è continua

(2) $f^{-1}(A)$ è aperto in $X \quad \forall A \in \mathcal{B}$ base della topologia di Y

(3) $f^{-1}(A)$ è aperto in $X \quad \forall A \in \mathcal{P}$ prebase della topologia di Y

DIMOSTRAZIONE

(1) \implies (2) \implies (3) ovvio in quanto gli elementi di una base sono aperti
e una base è anche una prebase

(3) \implies (1) Segue dal fatto che, se P è una prebase, ogni aperto di Y
è unione arbitraria di intersezioni finite di elementi di P ,
e f^{-1} commuta con l'unione e l'intersezione (e unioni arbitrarie
di intersezioni finite di aperti sono aperte) □

ASSIOMI di numerabilità

Ricordiamo che abbiamo definito la nozione di intorno di un punto x_0 in uno spazio topologico X : U è intorno di x_0 se $\exists A$ aperto $x_0 \in A \subseteq U$
o equivalentemente se $x_0 \in \overset{\circ}{U}$

Poniamo $I(x_0) = \{\text{intorni di } x_0 \text{ in } X\} \subseteq P(X)$

DEF. Un sistema fondamentale di intorni (SFI) è un sottoinsieme $\Omega \subseteq I(x_0)$ che contiene "intorni sufficientemente piccoli", cioè
 $\forall U \in I(x_0) \exists V \in \Omega$ t.c. $x_0 \in V \subseteq U$

esempio se X è metrico, un sistema fondamentale di intorni di x_0 è $\{B(x_0, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

Infatti ciascuna palla è un intorno e se $U \in I(x_0)$, per definizione $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B(x_0, \varepsilon) \subseteq U$.

Scelto n_0 t.c. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, allora $x_0 \in B(x_0, \frac{1}{n_0}) \subseteq U$

Di conseguenza, in uno spazio metrico, ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni numerabile

DEF. Uno spazio topologico X è:

(i) **I-numerabile** se ogni $x_0 \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile

(ii) **II-numerabile** se X ammette una base numerabile

(iii) **separabile** se X ammette un sottoinsieme denso numerabile

Queste proprietà sono chiamate **assiomi di numerabilità**

Fatti (1) Abbiamo visto che metrizzabile \Rightarrow I-numerabile

(questo fatto ci dà un criterio di non-metrizzabilità)

(2) \mathbb{R} è separabile in quanto $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è denso e numerabile

teorema II-numerabile \Rightarrow I-numerabile

DIMOSTRAZIONE

Se \mathcal{B} è una base numerabile, $\forall x_0 \in X$

pongo $\Omega_{x_0} = \{A \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x_0 \in A\} \subseteq \mathcal{B}$

Ovviamente Ω_{x_0} è numerabile (al più)

Vediamo che Ω_{x_0} è un sistema fondamentale di x_0 .

Essendo un aperto che contiene x_0 , ogni $A \in \Omega_{x_0}$ è un intorno di x_0 .

Se U è un qualsiasi intorno di x_0 , $x_0 \in \overset{\circ}{U} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$, dove $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$.

In particolare, $\exists \tilde{B} \in \mathcal{B}'$ t.c. $x_0 \in \tilde{B}$

Ma allora $\tilde{B} \in \Omega_{x_0}$ e $x_0 \in \tilde{B} \subseteq U \subseteq U$

□

teorema (1) II-numerabile \Rightarrow separabile
 (2) Se X è metrizzabile, II-numerabile \Leftrightarrow separabile

DIMOSTRAZIONE

(1) Sia B una base numerabile di X .

Possiamo supporre che nessun elemento di B sia \emptyset

Quindi $\forall B \in B$ posso scegliere $x_B \in B \subseteq X$

Dico che $Z = \{x_B, B \in B\}$, che è al più numerabile, e denso

Basta vedere che Z interseca ogni aperto non vuoto di X

Se A è un tale aperto, $A = \bigcup_{B \in B'} B$, $B' \neq \emptyset$

per cui $\exists B \in B' \subseteq B$ con $B \subseteq A$.

Ma allora $x_B \in B \subseteq A$ e perciò $x_B \in A \cap Z \neq \emptyset$

(2) Dobbiamo vedere che se X è metrizzabile, separabile \Rightarrow II-numerabile

Questo è vero perché abbiamo visto che, se $Z \subseteq X$ è un denso,

allora $B = \{B(z, r), z \in Z, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ è una base di X .

Se Z è al più numerabile, tale B è al più numerabile

(le coppie $(z, r) \in Z \times \mathbb{Q}$ sono in quantità numerabile) □

OSS (1) se U è un intorno di x_0 e $U \subseteq V$, allora V è un intorno di x_0

(2) Se U e W sono intorni di x_0 , allora $U \cap W$ è un intorno di x_0 ($U \cap V = \bigcup \cap V$)

(3) Se $\{U_i\}_{i \in I}$ sono intorni di x_0 , $\bigcap_{i \in I} U_i$ può non essere un intorno se I è infinito

esempio $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$, $U_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$ $\bigcap U_i = \{0\}$

esempio: la retta di Sorgenfrey

Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $B = \{[a, b), a < b\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

(1) Si mostri che B è base di una topologia τ

(2) Si mostri che τ è strettamente più fine della topologia euclidea

(3) Si mostri che τ è separabile

(4) Si mostri che τ non è II-numerabile (quindi non è metrizzabile)

DIMOSTRAZIONE

(1) Devo vedere che $\bigcup_{B \in B} B = X$ e che se $B_1, B_2 \in B$ allora $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in B'} B$, $B' \subseteq B$

Ma $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1) = \mathbb{R}$ e $[a, b) \cap [c, d) = \begin{cases} [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}) & \text{se } \max\{a, c\} < \min\{b, d\} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$ (elementi di B)

(2) Devo vedere che ogni aperto euclideo è aperto per τ

Basta vedere che ogni elemento di una base della topologia euclidea è aperto per τ

Una base della topologia euclidea è data dagli intervalli $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

e $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1}} [x_0 - \varepsilon + \frac{1}{n}, x_0 + \varepsilon)$ oppure $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \bigcup_{x_0 - \varepsilon < b < x_0 + \varepsilon} [b, x_0 + \varepsilon)$

(3) \mathbb{Q} è denso: infatti ogni aperto non vuoto di τ contiene un insieme della forma

$[a, b)$, $a < b$, che contiene un razionale

(4) Sia B' una base qualsiasi di τ .

Dico che $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists B \in B'$ t.c. $\min B = a$, e da ciò segue chiaramente $|B'| \geq |\mathbb{R}|$

ad esempio $B' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ha come immagine \mathbb{R} o $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$B \mapsto \inf B$

Infatti, per definizione di base, poiché $[a, a+1) \in \tau$, si ha $[a, a+1) = \bigcup_{B \in B'} B$ con $B_a \subseteq B'$

In particolare deve esistere $B \in B_a \subseteq B'$ t.c. $a \in B \subseteq [a, a+1)$, per cui $\min B = a$.

Successioni e spazi sequenziali

DEF Una successione è una funzione $x: \mathbb{N} \rightarrow X$, e $x(n)$ si denota x_n

Se X è uno spazio topologico, possiamo definire la nozione di limite di una successione

DEF $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x} \in X$ se $\forall U \in \mathcal{I}(\bar{x}) \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in U \forall n \geq n_0$

Fatto: se X ha la topologia indiscreta, $\forall x_n$ successione e $\forall \bar{x} \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x} \text{ perché } \mathcal{I}(\bar{x}) = \{X\}$$

In particolare, il limite può non essere unico

Naturalmente, una successione può non ammettere alcun limite

DEF Una sottosuccessione di x_n è una successione della forma x_{n_k} , dove $n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con n strettamente crescente: è denotata x_{n_k}

Fatto: se $x_n \rightarrow \bar{x}$, allora per ogni sottosuccessione $x_{n_k}, x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$

Dato $Y \subset X$, la "chiusura per successioni" di Y è

$$\hat{Y} = \{ \bar{x} \in X \text{ t.c. } \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y \text{ successione e } x_n \rightarrow \bar{x} \}$$

Fatti (1) se $x_n = p \forall n \in \mathbb{N}$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = p$

(2) di conseguenza, $Y = \hat{Y}$

Lemma Se X è \mathcal{I} -numerabile, esiste un sistema fondamentale numerabile di intorni inscatolati, cioè $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $U_{i+1} \subseteq U_i \forall i \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONE

Dato un sistema numerabile $\{W_i\}$ basta porre $U_i = \bigcap_{k=0}^i W_k$

È chiaro che ogni U_i è un intorno e se U è un qualsiasi intorno,

per definizione $\exists W_i$ con $x_0 \in W_i \subseteq U$ per cui

$x_0 \in U_i \subseteq W_i \subseteq U$ e perciò $\{U_i\}$ è un sistema fondamentale di intorni \square

teorema $\forall Y \subseteq X$, si ha $\hat{Y} \subseteq \bar{Y}$ e,
se X è I -numerabile, allora $\hat{Y} = \bar{Y}$

DIMOSTRAZIONE

Sia $p \in \hat{Y}$. Allora $\exists \{x_n\} \subseteq Y$ con $x_n \rightarrow p$

quindi $\forall U \in \mathcal{I}(p)$, $x_n \in U$ definitivamente, per cui in particolare $\{x_n\} \cap U \neq \emptyset$
e perciò $Y \cap U \neq \emptyset$. Dunque $p \in \bar{Y}$. Abbiamo perciò $\hat{Y} \subseteq \bar{Y}$

Supponiamo ora X I -numerabile e sia $p \in \bar{Y}$.

Devo costruire una successione in Y con limite p .

Sia $p \in \bar{Y}$ e $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni inscatolati di p

Perché $p \in \bar{Y}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $U_i \cap Y \neq \emptyset$ e posso scegliere $x_i \in U_i \cap Y$

Per concludere, basta vedere $x_n \rightarrow p$

Infatti, sia $U \in \mathcal{I}(p)$, allora per definizione di sistema fondamentale

di intorni, $\exists n_0 + c.$ $U_{n_0} \subseteq U$ e, poiché gli intorni sono inscatolati, $U_n \subseteq U \forall n \geq n_0$

Ma allora $x_n \in U_n \cap Y \subseteq U \forall n \geq n_0$, e perciò $x_n \rightarrow p$ per definizione di limite \square

corollario In spazi I -numerabili, conoscere il comportamento delle successioni
permette di capire chi sono i chiusi, dunque di conoscere la topologia.

Ci sono esempi in cui non vale l'uguaglianza

DEF. Uno spazio topologico X si dice di **Fréchet-Urysohn** se $\hat{Y} = \bar{Y} \quad \forall Y \subseteq X$
(il comportamento delle successioni determina completamente la topologia)

Uno spazio topologico X si dice **sequenziale** se

$\forall Y \subseteq X$ sequenzialmente chiuso ($Y = \hat{Y}$), è anche chiuso.

Le due condizioni non sono equivalenti:

Fréchet-Urysohn \Rightarrow sequenziale, ma non viceversa

Il punto è che Y non è necessariamente sequenzialmente chiuso.

Oss Gli spazi I -numerabili sono sequenziali

In uno spazio sequenziale, $Y \subseteq X$ è chiuso $\Leftrightarrow Y = \bar{Y} = \{x \in X \mid \exists \{y_n\} + c. y_n \rightarrow x\}$

proposizione Se $Y \subseteq X$ e X è sequenziale, allora
 $\bar{Y} \subseteq \overset{\circ}{Y} \iff$ per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$
 si ha che $x_n \in Y$ definitivamente
 In particolare, Y è aperto se vale $\forall y \in Y$

DIMOSTRAZIONE

(\implies) (è sempre vera)

Prendo $\bar{x} \in \overset{\circ}{Y}$ e una successione $\{x_n\}$ t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$

In effetti, $\overset{\circ}{Y}$ è un aperto, quindi è un intorno di \bar{x} , e quindi per definizione di convergenza, $x_n \in \overset{\circ}{Y} = Y$ definitivamente

(\impliedby) (serve la sequenzialità)

Per assurdo, $\bar{x} \notin \overset{\circ}{Y}$ e costruiamo una successione, $\{x_n\} \subseteq X$

t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$ ma x_n non è definitivamente in Y

Ricordiamo che $\overset{\circ}{Y} = X \setminus \overline{(X \setminus Y)}$, quindi $\bar{x} \in \overline{(X \setminus Y)}$.

Per la caratterizzazione dei chiusi in spazi sequenziali,

$\exists \{x_n\} \subseteq X$ t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$ e $x_n \in X \setminus Y$, cioè $x_n \notin Y$ \square

DEF. Siano X, Y spazi topologici

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice **continua per successioni**

se $\forall \{x_n\} \subseteq X$ t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$, si ha che $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$

proposizione Se $f: X \rightarrow Y$ è continua, allora è continua per successioni
 Se X è I -numerabile (sequenziale), vale il viceversa

DIMOSTRAZIONE

(\implies) Prendo $\{x_n\} \subseteq X$ t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$ e voglio mostrare $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$

Sia U un intorno di $f(\bar{x})$, devo mostrare $f(x_n) \in U$ definitivamente.

Per continuità di f , $f^{-1}(U) \in I(\bar{x})$

Ora visto che $x_n \rightarrow \bar{x}$, per definizione di convergenza

$x_n \in f^{-1}(U)$ definitivamente, cioè $f(x_n) \in U$

(\impliedby) Sia $A \subseteq Y$ un aperto, voglio mostrare che $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto

lo facciamo mostrando che è intorno di ogni suo punto.

Sia $\bar{x} \in f^{-1}(A)$ e mostriamo $\bar{x} \in \overset{\circ}{f^{-1}(A)}$.

Usando la caratterizzazione precedente, devo vedere che se

$\{x_n\} \subseteq X$ t.c. $x_n \rightarrow \bar{x}$, allora $x_n \in f^{-1}(A)$ definitivamente.

Poiché f è continua per successioni, ho che $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x}) \in A$

A è aperto in Y , quindi $f(x_n) \in A$ definitivamente, cioè $x_n \in f^{-1}(A)$ \square

Nota: (1) Per spazi non I -numerabili, ci sono nozioni di successioni generalizzate, che caratterizzano completamente la topologia

(2) C'è un'operazione di "sequenzializzazione", ma in generale non basta prendere la topologia i cui chiusi sono i chiusi per successioni dello spazio originale.

Topologia di sottospazio

Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme

Su Y c'è una topologia indotta dalla topologia di X , definita nel modo seguente:

$$A \subseteq Y \text{ è aperto} \iff \exists B \subseteq X \text{ aperto t.c. } A = B \cap Y$$

È immediato verificare che questo definisce una topologia su Y

DEF. La topologia appena descritta si chiama **topologia di sottospazio** e si denota $\tau|_Y$

Oss (1) L'inclusione $(Y, \tau|_Y) \xrightarrow{i} (X, \tau)$ è continua:

$i^{-1}(B) = B \cap Y$, quindi per definizione se B è aperto in X allora $i^{-1}(B)$ è aperto in Y .

(2) La topologia $\tau|_Y$ è la topologia meno fine tra le topologie su Y che rendono l'inclusione continua:

se τ' è una topologia su Y per cui i è continua, allora $\forall B \subseteq X$ aperto, $B \cap Y = i^{-1}(B) \in \tau'$, dunque $\tau|_Y \subseteq \tau'$

Segue immediatamente passando ai complementari che

$$C \subseteq Y \text{ è chiuso (per } \tau|_Y) \iff \exists D \subseteq X \text{ chiuso t.c. } C = Y \cap D$$

$$(C \text{ è chiuso in } Y \iff Y \setminus C \text{ è aperto} \iff \exists B \subseteq X \text{ aperto t.c. } B \cap Y = Y \setminus C \\ \iff \exists D \subseteq X \text{ chiuso t.c. } D \cap Y = C)$$

Oss Se \mathcal{B} è una base di τ su X , allora

$\mathcal{B}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$ è una base di $\tau|_Y$ su Y .

(se $A \subseteq Y$ è un aperto $\Rightarrow \exists B \subseteq X$ aperto t.c. $A = B \cap Y$ e

$$B \text{ base} \Rightarrow B = \bigcup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow A = (\bigcup_{i \in I} B_i) \cap Y = \bigcup_{i \in I} B_i \cap Y, \text{ con } B_i \cap Y \in \mathcal{B}'$$

ACHTUNG $\tau|_Y$ non è costituita dagli aperti di X contenuti in Y ; gli aperti di Y possono non essere aperti in tutto X .

esempio $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \text{asse } x$

In questo caso non esistono aperti di \mathbb{R}^2 contenuti in Y , ma la topologia di Y non è banale: è la topologia euclidea di \mathbb{R} .

Fatto: vale che se $B \subseteq X$ è aperto e si ha $B \subseteq Y$,

allora B è aperto anche in Y , semplicemente perché $B \cap Y = B$

(lo stesso vale per i chiusi)

proposizione (1) $Y \subseteq X$ è aperto in $X \Leftrightarrow \forall A \subseteq Y$ aperto, $i(A) \subseteq X$ è aperto
 (2) $Y \subseteq X$ è chiuso in $X \Leftrightarrow \forall C \subseteq Y$ chiuso, $i(C) \subseteq X$ è chiuso
 ("aperto di un aperto è aperto" e
 "chiuso di un chiuso è chiuso.")

DIMOSTRAZIONE

(1) (\Leftarrow) $Y \subseteq Y$ aperto, dunque $i(Y) = Y \subseteq X$ è aperto in X .

(\Rightarrow) Prendo $Y \subseteq X$ aperto e $A \subseteq Y$ aperto in Y .

Per definizione di τ_Y : $\exists B \subseteq X$ aperto t.c. $A = B \cap Y \subseteq X$
 aperto in X perché intersezione di due aperti

(2) analogo □

esempio $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1)$ con la topologia di sottospazio

1. $[0, 1/2)$ è aperto in Y , non è aperto in \mathbb{R}

Infatti $[0, 1/2) = (-1/2, 1/2) \cap Y$

2. $[1/2, 1)$ è chiuso di Y ,

infatti $[1/2, 1) = [1/2, 3/2] \cap Y$

proposizione (proprietà universale della topologia di sottospazio)

Siano X, Z spazi topologici e $Y \subseteq Z$ dotato della topologia di sottospazio e $f: X \rightarrow Y$ una funzione.
 Allora f è continua $\Leftrightarrow i \circ f: X \rightarrow Z$ è continua.

DIMOSTRAZIONE

$i \circ f$ continua $\Leftrightarrow \forall B \subseteq Z$ aperto si ha che $(i \circ f)^{-1}(B) \subseteq X$ è aperto

$\Leftrightarrow \forall B \subseteq Z$ aperto $f^{-1}(i^{-1}(B)) \subseteq X$ è aperto $\Leftrightarrow \forall B \subseteq Z$ aperto si ha che

$f^{-1}(B \cap Y) \subseteq X$ è aperto $\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y$ aperto si ha che $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto

$\Leftrightarrow f$ è continua □

proposizione Se $f: X \rightarrow Z$ è continua, $Y \subseteq X$ sottospazio, allora
 $f|_Y = f \circ i: Y \rightarrow Z$ è continua

DIMOSTRAZIONE

Visto che $f|_Y = f \circ i: Y \hookrightarrow X \rightarrow Z$ e

i, f sono continue, allora $f|_Y$ è continua □

Oss. la viceversa della proposizione non vale

esempio $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è continua
 ma $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

DEF Una funzione $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$

si dice **k-Lipschitziana**, $k \in \mathbb{R}, k > 0$ se

$$d'(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

f si dice **Lipschitziana** se è k -Lipschitziana per un qualche $k \in [0, +\infty)$

Oss Se f è Lipschitziana, allora f è continua.

Fissato $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, prendendo $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, se $d(x, x_0) < \delta$

$$\text{allora } d'(f(x), f(x_0)) \leq k d(x, x_0) < k \delta = \varepsilon$$

e dunque $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

proposizione Sia X spazio topologico e $Y \subseteq X$ sottospazio.

(1) se X è II-numerabile $\Rightarrow Y$ è II-numerabile

(2) se X è I-numerabile $\Rightarrow Y$ è I-numerabile

(3) se X è separabile, non è detto che Y sia separabile

(4) se X è metrizzabile $\Rightarrow Y$ è metrizzabile

(la topologia di sottospazio coincide con la topologia indotta da $d_X|_Y$)

(5) ((1)+(4)) se X è metrizzabile e separabile

$\Rightarrow Y$ è separabile

DIMOSTRAZIONE

(1) Se \mathcal{B} è base al più numerabile di X , allora

$\mathcal{B}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$ è una base di Y , e

$|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}| \leq |\mathbb{N}|$ quindi anche Y è I-numerabile

(2) Sia X I-numerabile e $y \in Y \subseteq X$

Sia \mathcal{U} un sfi di y in X , al più numerabile.

Dico che $\mathcal{U}' = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{U}\}$ è un sfi di y in Y

(e chiaramente $|\mathcal{U}'| \leq |\mathcal{U}| \leq |\mathbb{N}|$)

Mostriamo che gli elementi di \mathcal{U}' sono intorni di y .

È chiaro che se $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap Y$ è intorno di y in Y

per continuità dell'inclusione $i: Y \hookrightarrow X$.

Sia ora $B \in \mathcal{I}(y)$ in Y , voglio vedere che $A \cap Y \subseteq B$ per un qualche $A \in \mathcal{U}$.

Consideriamo $\mathring{B} \subseteq Y$ aperto di Y e $y \in \mathring{B}$ perché $B \in \mathcal{I}(y)$.

Per definizione di topologia di sottospazio, so che:

$$\exists \mathcal{B}' \subseteq X \text{ aperto t.c. } \mathring{B} = Y \cap \mathcal{B}'$$

Ora $y \in \mathcal{B}'$ perché $y \in \mathring{B} = Y \cap \mathcal{B}' = \mathcal{B}'$, $\mathcal{B}' \in \mathcal{I}(y)$ in X , quindi,

visto che \mathcal{U} è sfi di y in X , deduco che $\exists A \in \mathcal{U}$ t.c. $y \in A \subseteq \mathcal{B}'$.

Segue che $y \in A \cap Y \subseteq \mathcal{B}' \cap Y = \mathring{B} = \mathring{B}$

quindi $A \cap Y$ è elemento di \mathcal{U}' che cercavo.

(3) Se Y è uno spazio topologico, si può costruire uno spazio separabile X con un sottospazio omeomorfo a Y . Per avere un controesempio, basta considerare Y non separabile, ad esempio un insieme più che numerabile con la topologia discreta (l'unico denso di uno spazio discreto è tutto lo spazio)

Dato Y spazio topologico, considero $X = Y \cup \{\infty\}$ dove ∞ è un non-elemento di Y . Definisco una topologia su X , τ_X :

- $\emptyset \in \tau_X$
- $A \cup \{\infty\} \in \tau_X$ dove $A \in \tau_Y$

Si verifica che τ_X è una topologia.

Questa topologia è separabile, visto che $\{\infty\}$ è denso

Inoltre, Y è un sottospazio topologico di X :

se $A \subseteq Y$ è aperto, allora è aperto anche nella topologia di sottospazio di $Y \subseteq X$, perché $A = (A \cup \{\infty\}) \cap Y$, dove $A \cup \{\infty\}$ è aperto di X .

Viceversa, ogni aperto della topologia di ssp di $Y \subseteq X$ è della forma $(A \cup \{\infty\}) \cap Y = A$, quindi è un aperto di Y per τ_Y .

(4) Sia τ la topologia di X , che è metrizzabile, indotta dalla distanza $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$

Indichiamo con $\tau|_Y$ la topologia di sottospazio di Y e con τ'_Y la topologia indotta dalla distanza ristretta $d|_{Y \times Y}$

Voglio mostrare $\tau|_Y = \tau'_Y$.

- $\tau'_Y \subseteq \tau|_Y$: visto che le palle aperte in Y sono una base di τ'_Y , basta mostrare che sono aperte in $\tau|_Y$.

Ma in effetti, se $y \in Y$, e $R \in \mathbb{R}^{>0}$, si ha:

$$B_Y(y, R) = B_X(y, R) \cap Y \text{ e } B_X(y, R) \text{ è aperta in } X,$$

quindi $B_Y(y, R) \in \tau|_Y$.

- $\tau|_Y \subseteq \tau'_Y$: ci sono due possibilità: "a mano", usando come base di X le palle aperte e mostrando che $B_X(x, R) \cap Y$ è aperto in Y ; oppure,

Alternativamente:

Osserviamo che $i: Y \hookrightarrow X$ è 1-Lipschitziana (Y ha la distanza ristretta) dunque è continua.

Segue che se $B_X(x, R)$ è una palla aperta (quindi un aperto) di X ,

$$B_X(x, R) \cap Y = i^{-1}(B_X(x, R)) \in \tau'_Y$$

(si può anche concludere usando che $\tau|_Y$ è la meno fine che rende i continua, quindi $\tau|_Y \subseteq \tau'_Y$)

□

mappe aperte e chiuse

DEF. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice **aperta**
se $\forall A \subseteq X$ aperto, si ha $f(A) \subseteq Y$ è aperto
Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice **chiusa**
se $\forall C \subseteq X$ chiuso, si ha $f(C) \subseteq Y$ è chiuso

Al contrario della continuità, queste due nozioni non sono equivalenti

esempio

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
è chiusa ma non è aperta
- (2) l'inclusione $i: (0,1) \hookrightarrow \mathbb{R}$
è aperta (aperto di un aperto è aperto)
ma non è chiusa ($(0,1)$ è chiuso in sé ma non in \mathbb{R})
- (3) l'inclusione $i: \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ non è né aperta né chiusa

DEF. Una funzione continua $f: X \rightarrow Y$ si dice **immersione topologica**
se induce un omeomorfismo tra X e $f(X) \subseteq Y$, dove $f(X)$
ha la topologia di sottospazio indotta da Y

Oss

- (1) Un'immersione topologica è iniettiva
- (2) Se $f: X \rightarrow Y$ continua e biunivoca, allora
il fatto che $f^{-1}: Y \rightarrow X$ sia continua equivale al fatto
che f sia aperta (e anche al fatto che sia chiusa)
Infatti f^{-1} è continua $\iff \forall A \subseteq X$ aperto ho che $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ è aperto in Y
(analogo per i chiusi)
- (3) Se $Y \subseteq X$ è un sottospazio topologico,
l'inclusione $i: Y \hookrightarrow X$ è un'immersione topologica

proposizione Se $f: X \rightarrow Y$ continua e iniettiva, allora

- (1) f è chiusa $\iff f$ è un'immersione topologica
con immagine chiusa in Y
- (2) f è aperta $\iff f$ è un'immersione topologica
con immagine aperta in Y

DIMOSTRAZIONE

(1) (\implies) $f(X)$ è un chiuso di Y perché f è chiusa e X è chiuso in sé stesso
Rimane da mostrare che $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ (definita perché f è iniettiva)
è continua:
se $C \subseteq X$ è chiuso, allora $(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$ che è un
chiuso di Y , ma essendo contenuto in $f(X)$, è anche
chiuso in $f(X)$ $\implies f$ è un'immersione topologica

(\Leftarrow) Sia $C \subseteq X$ chiuso

Visto che f è un'immersione topologica, $f: X \rightarrow f(X)$ è un omeomorfismo. Segue che $f(C)$ è un chiuso di $f(X)$, che per ipotesi è chiuso in Y . Segue che $f(C)$ è chiuso in Y , quindi f è chiusa.

(2) analogo

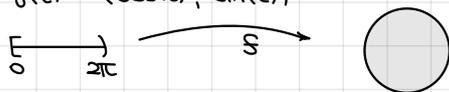
□

Esistono però immersioni topologiche né aperte né chiuse

esempio $i: [0,1) \hookrightarrow \mathbb{R}$

esempio $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t))$$



L'immagine di f è $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$

$f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ è biunivoca e continua

Ci chiediamo se è un omeomorfismo, cioè se $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$

Non lo è: mostriamo che $f^{-1}: S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ non è continua

Il problema è in $(1, 0)$. f^{-1} non è continua in questo punto

Infatti si può costruire una successione in S^1 nel IV quadrante che converge a $(1, 0)$: $x_n \rightarrow (1, 0)$

La successione immagine non converge a $f^{-1}((1, 0)) = 0 \in [0, 2\pi)$

(vista in \mathbb{R} sta convergendo a $2\pi \dots$)

Prodotti

Se $\{X_i\}_{i \in I}$ sono insiemi, il loro prodotto cartesiano è definito da

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \forall i \in I\}$$

Un elemento $f \in \prod_{i \in I} X_i$ si scrive come $(f(i))_{i \in I}$, o direttamente come $(x_i)_{i \in I}$ con $x_i \in X_i$.
 x_i si chiama coordinata i -esima dell'elemento $(x_i)_{i \in I}$.

Per $i \in I$, è definita la proiezione sul fattore i -esimo

$$\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i \\ (x_i)_{i \in I} \longmapsto x_i \quad \circ \quad \pi_i(f) = f(i)$$

Supponiamo ora che (X_i, τ_i) siano spazi topologici

DEF la topologia prodotto su $\prod_{i \in I} X_i$ è la topologia meno fine tra quelle per cui π_i è continua $\forall i \in I$

(È ben definita, perché la topologia discreta funziona, e posso quindi intersecare le topologie che soddisfanno la richiesta)

proposizione la topologia prodotto ha come prebase la famiglia $\{\pi_i^{-1}(A) \mid i \in I, A \subseteq X_i \text{ è aperto}\} = \{(x_j)_{j \in I} \mid x_i \in A\}$

DIMOSTRAZIONE

La topologia prodotto è per definizione la più piccola topologia che rende π_i continua $\forall i \in I$, ma questo succede se e solo se $\pi_i^{-1}(A)$, per $i \in I, A \subseteq X_i$ aperto, è aperto.

Quindi la topologia prodotto è proprio la topologia generata da questi sottosistemi, che quindi ne costituiscono una prebase

(non serve aggiungere tutto lo spazio $\prod_{i \in I} X_i$, perché fissato i_0 , allora $\pi_{i_0}^{-1}(X_{i_0}) = \prod_{i \in I} X_i$) \square

corollario Una base della topologia prodotto è $B = \{\pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \mid k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in I, A_{i_j} \in \tau_{i_j} \forall j=1, \dots, k\}$

È anche immediato vedere che se B_i è una base di τ_i su X_i , allora un'altra base della topologia prodotto è data da

$$B' = \{\bigcap_{j=1}^k \pi_{i_j}^{-1}(A_{i_j}) \mid k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in I, A_{i_j} \in B_{i_j}\}$$

NOTA: $\bigcap_{j=1}^k \pi_{i_j}^{-1}(A_{i_j}) = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_{i_j} \in A_{i_j} \forall j=1, \dots, k\}$

Oss se I è un insieme finito, $I = \{1, \dots, k\}$,

una base della topologia prodotto è data da

$$B = \{A_1 \times \dots \times A_k \mid A_i \subseteq X_i \text{ è un aperto } \forall i=1, \dots, k\}$$

e inoltre tutte le intersezioni $\bigcap_{j=1}^h \pi_{i_j}^{-1}(A_{i_j})$, dove $\{i_1, \dots, i_h\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, sono anche elementi di B , dove si prende $A_i = X_i$ se $i \notin \{i_1, \dots, i_h\}$

Quindi se I è finito, una base di aperti del prodotto è data da prodotti di aperti degli spazi.

Se I è infinito, questo non è più vero:

gli aperti di base di $\prod_{i \in I} X_i$ sono i sottoinsiemi della forma $\prod_{i \in I} A_i$ dove $A_i = X_i$ è aperto e $A_i = X_i$ tranne per un numero finito di indici

NOTA se $|I| = +\infty$, c'è un'altra topologia su $\prod_{i \in I} X_i$, in generale diversa, una cui base è data dai sottoinsiemi $\prod_{i \in I} A_i$ dove $A_i = X_i$ è aperto. Questa topologia è più fine della topologia prodotto, e si chiama "box topology".

proposizione Siano (X, d) , (Y, d') due spazi metrici da topologia prodotto $\tau_X \times \tau_Y$ su $X \times Y$ coincide con la topologia indotta da una qualsiasi tra le distanze su $X \times Y$:

$$d_1((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d'(y, y')$$
$$d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d(x, x')^2 + d'(y, y')^2}$$
$$d_\infty((x, y), (x', y')) = \max\{d(x, x'), d'(y, y')\}$$

In particolare, il prodotto di due spazi metrizzabili è metrizzabile

DIMOSTRAZIONE

Si dimostra come per le analoghe distanze su \mathbb{R}^2

che d_1, d_2, d_∞ sono distanze topologicamente equivalenti

Mostriamo che d_∞ induce su $X \times Y$ la topologia prodotto $\tau_X \times \tau_Y$

Indico con τ la topologia su $X \times Y$ indotta da d_∞

Dal fatto che $\pi_X : (X \times Y, d_\infty) \rightarrow (X, d)$ è 1-Lipschitziana

segue che è continua; analogo per π_Y .

Dunque $\tau_X \times \tau_Y \subseteq \tau$

Per l'altra inclusione, basta vedere che le palle aperte di d_∞ sono in $\tau_X \times \tau_Y$. Ma infatti

$$B_{d_\infty}((x, y), R) = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_d(x, R) \times B_{d'}(y, R)$$
$$\max\{d(x, x'), d'(y, y')\} < R \iff d(x, x') < R, d'(y, y') < R$$

ed è dunque aperta per la topologia prodotto □

corollario $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$

DIMOSTRAZIONE

Se d_n è la distanza euclidea di \mathbb{R}^n , d_m di \mathbb{R}^m , allora la distanza d_2 della proposizione è proprio la distanza euclidea di \mathbb{R}^{n+m} . □

proposizione Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia di spazi metrizzabili.
 Allora $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ è metrizzabile.

DIMOSTRAZIONE

Osserveremo innanzitutto che, se la topologia τ_i su X_i è indotta dalla distanza d_i , allora (X_i, d_i) è topologicamente equivalente allo spazio metrico limitato (X_i, d'_i) con $d'_i(x, y) = \min\{d_i(x, y), 1\}$.
 Infatti:

- $\tau'_i \subseteq \tau_i$ perché $d'_i(x, y) \leq d_i(x, y)$
- $\tau_i \subseteq \tau'_i$ perché, dato $A \in \tau_i$, vale che $\forall x \in A \exists \varepsilon_x > 0$ t.c. $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$.

Quindi $A = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x)$. Dato $\varepsilon'_x = \min\{\varepsilon_x, 1\}$, vale $A = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon'_x) = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon'_x) \in \tau'_i$

Supponiamo dunque $d_i \leq 1 \forall i$

Definiamo, dati $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$, $d(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i)$

Questa è una distanza:

- (1) $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in X$ perché tutti gli addendi sono non nulli e $d(x, y) = 0 \iff d_i(x_i, y_i) = 0 \forall i \iff x_i = y_i \forall i \iff x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ perché $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i) \forall i$
- (3) $d(x, z) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} d_i(x_i, z_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} (d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)) = d(x, y) + d(y, z)$

Sia τ la topologia indotta da d e τ_x la topologia prodotto.

• $\tau_x \subseteq \tau$: mostriamo che $\forall i, \pi_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ è continua.

Dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta = 2^{-i} \varepsilon$, infatti

$$d(x, y) = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} d_j(x_j, y_j) = 2^{-i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} 2^{-j} d_j(x_j, y_j) \geq 0$$

$$\implies 2^{-i} d_i(x_i, y_i) < 2^{-i} \varepsilon \implies d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$$

ovvia $\pi_i(B(x, \delta)) \subseteq B(\pi_i(x), \varepsilon)$

• $\tau \subseteq \tau_x$: sia $B = B_d(x, \varepsilon)$, e mostriamo che esiste

un aperto $U \in \tau_x$ t.c. $x \in U \subseteq B$

Sia $N \in \mathbb{N}$ t.c. $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$ e per ogni $i = 0, \dots, N$ definiamo $B_i = B_{d_i}(x_i, \frac{\varepsilon}{4})$

Consideriamo $y \in \bigcap_{i=0}^N \pi_i^{-1}(B_i)$: allora $d_i(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{4} \forall i = 0, \dots, N$

$$\text{Ma allora } d(x, y) = \sum_{i=0}^N 2^{-i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i=N+1}^{+\infty} 2^{-i} d_i(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1 - (1/2)^{N+1}}{1 - 1/2} + 2^{-N-1} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} = \frac{(1 - (1/2)^{N+1}) \varepsilon}{2} + \frac{2^{-N}}{2} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

quindi $y \in B \implies \bigcap_{i=0}^N \pi_i^{-1}(B_i) \subseteq B$

Quindi $\tau = \tau_x$ e X è metrizzabile. □

teorema (Proprietà universale del prodotto)

Siano $X_i, i \in I$, spazi topologici, Y uno spazio topologico e $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ una funzione. Allora:
 f è continua $\iff \pi_i \circ f: Y \rightarrow X_i$ è continua $\forall i \in I$

DIMOSTRAZIONE

(\implies) chiaro perché π_i sono funzioni continue e composizione di continue è continua

(\impliedby) Basta verificare che f è continua su una prebase. consideriamo la prebase di una proposizione precedente.

Se $\pi_i^{-1}(A)$ è un aperto di questa prebase (cioè $A \subseteq X_i$ è aperto), allora

$$f^{-1}(\pi_i^{-1}(A)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A) \subseteq Y$$

che è un aperto per ipotesi di continuità di $\pi_i \circ f$ □

Lemma f è aperta \iff data una base B di X , $f(A)$ è aperto $\forall A \in B$

DIMOSTRAZIONE

(\implies) ovvio

(\impliedby) Se $\Omega \subseteq X$ è aperto, $\Omega = \bigcup_{B \in B'} B$, $B' \subseteq B$

$$\text{e } f(\Omega) = f\left(\bigcup_{A \in B'} A\right) = \bigcup_{A \in B'} f(A) \text{ che è aperto} \quad \square$$

proposizione Sia X un prodotto topologico e π_i la proiezione i -esima.
Allora π_i è aperta.

DIMOSTRAZIONE

Per il lemma, posso verificare che π_i sia aperta sugli aperti della base standard.

Un tale aperto è della forma $A = \bigcap_{k=1}^n \pi_{j_k}^{-1}(U_k)$ dove $j_1, \dots, j_n \in I$, $U_k \subseteq X_{j_k}$ aperto

Posso anche supporre $j_a \neq j_b$ se $a \neq b$

$\pi_i(A)$ è:

• se $i \neq j_k \forall k=1, \dots, n$, $\pi_i(A) = X_i$ (ossia $A \neq \emptyset$)

• se $i = j_{k_0}$ per un qualche k_0 , $\pi_i(A) = \pi_{j_{k_0}}(A) = U_{k_0}$

In ogni caso, $\pi_i(A)$ è aperto in X_i . □

Non è detto invece che le proiezioni sui fattori siano chiuse

esempio Sia $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = x$ la proiezione sul primo fattore di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

π è aperta per la proposizione, ma non è chiusa:

se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$, allora $C \subseteq \mathbb{R}^2$ è chiuso

(preimmagine del chiuso $\{1\}$ tramite la funzione continua $(x,y) \mapsto xy$)

Ma $\pi(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è chiuso

Immersione nel prodotto

Sia $X = \prod_{i \in I} X_i$ e fissiamo $i_0 \in I$

$\forall i \neq i_0$, scegliamo $x_i \in X_i$.

Possiamo allora definire l'immersione:

$$J_{i_0}: X_{i_0} \longrightarrow X$$
$$J_{i_0}(x) = (x_i) \text{ con } \begin{cases} x_i = x_i & \text{se } i \neq i_0 \\ x_{i_0} = x & \text{se } i = i_0 \end{cases}$$

teorema J_{i_0} è un'immersione topologica.

DIMOSTRAZIONE

Per vedere che J_{i_0} sia continua, basta vedere che

$\pi_i \circ J_{i_0}$ sia continua $\forall i \in I$.

Se $i \neq i_0$, $\pi_i \circ J_{i_0}(x) = x_i \forall x \in X_{i_0}$, per cui $\pi_i \circ J_{i_0}$ è costante, e quindi continua.

Se $i = i_0$, $\pi_{i_0} \circ J_{i_0}(x) = x \forall x \in X_{i_0}$, per cui $\pi_{i_0} \circ J_{i_0}$ è l'identità, che è continua.

È chiaro che un'inversa insiemistica di $J_{i_0}: X_{i_0} \rightarrow J_{i_0}(X_{i_0})$ è la restrizione a $J_{i_0}(X_{i_0})$ della proiezione π_{i_0} .

Poiché la restrizione di una funzione continua è continua, si ha la tesi. \square

Questo enunciato ammette la seguente generalizzazione (con dimostrazione analoga)

teorema Sia $I_0 \subseteq I$ un sottoinsieme, e $\forall i \notin I_0$ scegliamo $x_i \in X_i$.

Sia J la mappa:

$$J: \prod_{i \in I_0} X_i \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$$
$$J((x_i)_{i \in I_0}) = (y_i)_{i \in I} \text{ con } \begin{cases} y_i = x_i & \text{se } i \in I_0 \\ y_i = x_i & \text{se } i \notin I_0 \end{cases}$$

allora J è un'immersione topologica.

Topologia della convergenza puntuale

Sia Y uno spazio topologico e X un insieme.

Allora l'insieme delle funzioni

$$F(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \text{ funzione } f \text{ è in bijezione naturale con } Y^X = \prod_{x \in X} Y\}$$

dove $Y_x = Y \forall x \in X$

esempio $X = [0, 1]$, $Y^{[0, 1]} = \{f: [0, 1] \rightarrow Y\}$

Tramite questa identificazione, possiamo dotare $F(X, Y)$ della topologia prodotto, che in questo contesto prende il nome di topologia della convergenza puntuale.

teorema Sia $f_n: X \rightarrow Y$ una successione di funzioni.
Allora $f_n \rightarrow \bar{f}$ in $Y^X \iff f_n(x) \rightarrow \bar{f}(x)$ in $Y, \forall x \in X$

DIMOSTRAZIONE

(\implies) Se $f_n \rightarrow \bar{f}$ in Y^X , per definizione di topologia prodotto (e poiché funzioni continue portano successioni convergenti in successioni convergenti), $\forall x \in X \pi_x(f_n) \rightarrow \pi_x(\bar{f})$, cioè $\forall x \in X f_n(x) \rightarrow \bar{f}(x)$

(\impliedby) Devo mostrare, $\forall U$ intorno di \bar{f} , $f_n \in U$ definitivamente.

Un tale intorno U contiene un aperto della base standard di Y^X contenente \bar{f} . Per definizione di topologia prodotto,

esistono perciò $y_1, \dots, y_k \in X$ e aperti V_1, \dots, V_k di Y

tali che $U \supseteq \pi_{y_1}^{-1}(V_1) \cap \dots \cap \pi_{y_k}^{-1}(V_k) \ni \bar{f}$

Per ipotesi, so che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y_j) = \bar{f}(y_j) \forall j = 1, \dots, k$

Dunque definitivamente $f_n(y_1) \in V_1, \dots, f_n(y_k) \in V_k$

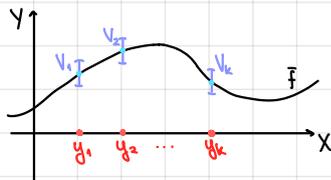
Trattandosi di un insieme finito di condizioni, posto $\pi = \max\{n_1, \dots, n_k\}$,

ho che $\forall n \geq \pi f_n(y_j) \in V_j \forall j = 1, \dots, k$.

Ma allora $\forall n \geq \pi, f_n \in \bigcap_{j=1}^k \pi_{y_j}^{-1}(V_j) \subseteq U$,

per cui $f_n \rightarrow \bar{f}$ in Y^X . □

Abbiamo visto perciò che un intorno di \bar{f} in Y^X seleziona un numero finito y_1, \dots, y_k di punti di X , un intorno di $\bar{f}(y_j), j = 1, \dots, k$ e include per tutte le funzioni che "passano" per quegli intorni.



Assiomi di separazione

DEF. Sia X uno spazio topologico. Allora X si dice

- T_0 se $\forall x, y \in X, x \neq y \quad \exists U$ aperto tale che $x \in U$ e $y \notin U$ o viceversa
- T_1 se $\forall x, y \in X, x \neq y \quad \exists U \in \mathcal{I}(x), y \notin U, \exists V \in \mathcal{I}(y), x \notin V$
- T_2 (o di Hausdorff) se $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U \in \mathcal{I}(x), V \in \mathcal{I}(y)$ tali che $U \cap V = \emptyset$

Oss $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

Il viceversa è falso

esempio la topologia cofinita su \mathbb{R} è T_1 ma non T_2

Infatti, se $x \neq y, U = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ è un intorno di x che non contiene y .

Pero, se U e V sono intorni di x e y , allora contengono aperti non vuoti,

ma due aperti non vuoti della topologia cofinita su \mathbb{R} si intersecano sempre

teorema X è $T_1 \Leftrightarrow \forall x \in X, \{x\}$ è chiuso.

DIMOSTRAZIONE

$\{x\}$ è chiuso $\Leftrightarrow X \setminus \{x\}$ è aperto $\Leftrightarrow X \setminus \{x\}$ è intorno di ogni suo punto

$\Leftrightarrow \forall y \in X \setminus \{x\}, X \setminus \{x\}$ è intorno di $y \Leftrightarrow \forall y \neq x \exists U \in \mathcal{I}(y) U \subseteq X \setminus \{x\}$
(sottominsiemi di intorni di y sono intorni di y)

$\Leftrightarrow \forall y \neq x \exists U \in \mathcal{I}(y) x \notin U$

□

Nel prodotto $X \times X$, la diagonale $\Delta = \{x, x\}$
è l'insieme $\Delta = \{(x, x), x \in X\}$

teorema X è $T_2 \Leftrightarrow \Delta$ è chiusa in $X \times X$

DIMOSTRAZIONE

Δ è chiusa $\Leftrightarrow X \times X \setminus \Delta$ è aperta in $X \times X$

$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \exists \Omega$ aperto della base standard di $X \times X$
t.c. $(x, y) \in \Omega \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$

$\Leftrightarrow \forall x \neq y \exists U, V$ aperti di X t.c. $(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$

$\Leftrightarrow \forall x \neq y \exists U, V$ aperti di X t.c. $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$

$\Leftrightarrow X$ è T_2 .

□

corollario Se $f: X \rightarrow Y$ è continua e Y è T_2 , allora il grafico di f è chiuso in $X \times Y$

DIMOSTRAZIONE

La funzione $F: X \times Y \rightarrow Y \times Y$

$$F(x, y) = (f(x), y)$$

è continua perché sono continue le sue composizioni con le proiezioni:

$$\pi_2 \circ F(x, y) = \pi_2(f(x), y) = y, \text{ per cui } \pi_2 \circ F = \pi_2 \text{ che è continua}$$

$$\pi_1 \circ F(x, y) = \pi_1(f(x), y) = f(x), \text{ per cui } \pi_1 \circ F = f \circ \pi_1 \text{ che è continua}$$

Ma essendo Y T_2 , la diagonale $\Delta \subseteq Y \times Y$ è chiuso, per cui

$F^{-1}(\Delta)$ è chiuso in $X \times Y$

$$F^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.c. } F(x, y) \in \Delta\} = \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.c. } y = f(x)\}$$

□

corollario Siano $f, g: X \rightarrow Y$ continue e Y sia T_2 .

Allora l'insieme $\Omega = \{x \in X \text{ t.c. } f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X .

DIMOSTRAZIONE

Sia $F: X \rightarrow Y \times Y$

$$F(x) = (f(x), g(x))$$

Tale F è continua perché lo sono le sue composizioni con le proiezioni.

Per cui, essendo Y T_2 , l'insieme

$$F^{-1}(\Delta) = \{x \in X \text{ t.c. } F(x) \in \Delta\} = \{x \in X \text{ t.c. } f(x) = g(x)\} = \Omega \text{ è chiuso}$$

□

corollario Sia X T_2 , $f: X \rightarrow X$ continua.

l'insieme dei punti fissi di f $\{x \in X \text{ t.c. } f(x) = x\}$ è chiuso

DIMOSTRAZIONE

Basta applicare il corollario precedente con $g = \text{id}_X$ □

L'assioma T_2 è fondamentale per molte ragioni
 Ad esempio, per l'unicità del limite

teorema Sia $X T_2$, e sia $\{x_n\}$ una successione in X
 Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, se esiste, è unico

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo, supponiamo $\exists l_1, l_2 \in X, l_1 \neq l_2$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_2$

Siccome X è T_2 , $\exists U \in \mathcal{I}(l_1), \exists V \in \mathcal{I}(l_2)$ con $U \cap V = \emptyset$

Per definizione di limite, $x_n \in U$ definitivamente e $x_n \in V$ definitivamente
 quindi $x_n \in U \cap V = \emptyset$ definitivamente \downarrow □

teorema X metrizzabile $\Rightarrow X T_2$

DIMOSTRAZIONE

Siano $x, y \in X, x \neq y$. Sia $k = d(x, y) > 0$ dove
 d è una distanza che induce la topologia di X .

Allora le palle aperte di centro x e y e raggio $k/2$
 sono intorno disgiunti di x e y .

infatti, per la disuguaglianza triangolare,

se esistesse $z \in \mathcal{B}(x, k/2) \cap \mathcal{B}(y, k/2)$, avremmo

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k \quad \downarrow$$

□

Dunque metrico $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

DEF. Uno spazio topologico X si dice

- T_3 se $\forall x \in X$ e $\forall C \subseteq X$ chiuso, $x \notin C$
 $\exists U, V \subseteq X$ aperti con $x \in U, C \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$
- T_4 se $\forall C, C' \subseteq X$ chiusi con $C \cap C' = \emptyset$
 $\exists U, U' \subseteq X$ aperti con $C \subseteq U, C' \subseteq U', U \cap U' = \emptyset$
- regolare se è T_3 e T_1
- normale se è T_4 e T_1

Fatto T_3 o T_4 non implicano T_1

esempio La topologia indiscreta è T_4 perché le uniche coppie
 di chiusi disgiunti sono $\{\emptyset, X\}$ e $\{\emptyset, \emptyset\}$ che vengono
 separati dagli aperti $\{\emptyset, X\}, \{\emptyset, \emptyset\}$

Se $|X| \geq 2$, la topologia indiscreta non è T_1

(si dice che gli aperti U, V separano C, C' se $C \subseteq U, C' \subseteq V, U \cap V = \emptyset$)

L'indiscreta è anche T_3 , dunque $T_3 \not\Rightarrow T_1$

Lemma Sia (X, d) metrico e sia $A \subseteq X$.

Poniamo $d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$d_A(p) = \inf \{ d(p, a) \mid a \in A \}$$

Allora d_A è continua e $d_A^{-1}(0) = \bar{A}$

DIMOSTRAZIONE

Per vedere che d_A è continua, basta controllare che sia 1-dipschitziana,

$$\text{cioè } |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Fissiamo $x, y \in X$, $\forall a \in A$ vale $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

Passando all'inf su $a \in A$ sul membro di sinistra, ottengo

$$\text{che } \forall a \in A \quad d_A(x) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

Passando all'inf su $a \in A$ nel membro di destra, ho

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y) \implies d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$$

Per simmetria $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$

Donque f è continua.

Infine, $p \in \bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : d(p, a) < \varepsilon \iff \inf \{ d(p, a) \mid a \in A \} = 0 \iff d_A(p) = 0$$

□

teorema Metrizzabile \implies normale \implies regolare $\implies T_2 \implies T_1$

DIMOSTRAZIONE

d'unica implicazione non immediata è "metrizzabile \implies normale".

Sappiamo che metrizzabile $\implies T_2 \implies T_1$

quindi ci basta vedere metrizzabile $\implies T_2$

Siano C_1, C_2 chiusi disgiunti di X

Sia ora $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{d_1(x)}{d_1(x) + d_2(x)}$$

f è ben definita:

se avessimo $d_1(x) + d_2(x) = 0$, poiché $d_1(x) \geq 0, d_2(x) \geq 0$,

dovrei avere $d_1(x) = d_2(x) = 0$, e allora per il lemma

$$x \in d_1^{-1}(0) \cap d_2^{-1}(0) = \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 = C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad \nexists$$

Inoltre f è continua perché rapporto di funzioni continue

con denominatore non nullo

Pongo ora $U = f^{-1}((-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$, $V = f^{-1}((\frac{2}{3}, \frac{4}{3}))$

e osservo che U e V sono aperti e disgiunti.

Inoltre, se $x \in C_1$, $f(x) = 0$

se $x \in C_2$: $f(x) = 1$

Per cui $U \supseteq C_1$, $V \supseteq C_2$

□

Lemma di Urysohn

Se X è T_0 e C_1, C_2 sono chiusi disgiunti di X ,
esiste $f: X \rightarrow [0,1]$ continua tale che
 $f(x)=0 \forall x \in C_1, f(x)=1 \forall x \in C_2$

teorema

X è $T_3 \iff \forall x_0 \in X$ ammette un SFI chiuso

DIMOSTRAZIONE

(\implies) Sia $x_0 \in X$ e sia $U \equiv I(x_0)$ l'insieme di tutti gli intorni chiusi

Basta vedere che U è SFI, cioè che

$$\forall W \in I(x_0) \exists U \in U \text{ t.c. } x_0 \in U \subseteq W$$

Poiché W è un intorno, $x_0 \in \overset{\circ}{W} \subseteq W$ e perciò

$$x_0 \notin C = X \setminus \overset{\circ}{W} \text{ con } C \text{ chiuso}$$

Poiché X è T_0 , esistono aperti disgiunti

$$U, V \text{ con } x_0 \in U \text{ e } C \subseteq V$$

Per costruzione, $U \in I(x_0)$ e perciò lo è anche \bar{U} .

Per concludere, basta osservare $\bar{U} \subseteq W$.

Infatti, poiché $U \cap V = \emptyset$, $U \subseteq X \setminus V$ chiuso

$$\text{dunque } \bar{U} \subseteq X \setminus V = X \setminus C = \overset{\circ}{W} = W$$

(\impliedby) Dati $x_0 \in X$, $C \subseteq X$ chiuso con $x_0 \notin C$

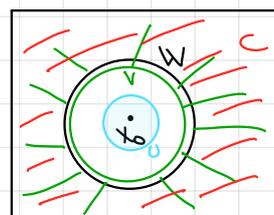
Osservo che $W = X \setminus C$, essendo un aperto che contiene x_0 ,
quindi è un intorno di x_0 .

Per ipotesi $\exists D$ intorno chiuso di x_0 con $x_0 \in D \subseteq W$

Essendo un intorno, $x_0 \in \overset{\circ}{D} \subseteq D$

Allora $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ aperto e $C = X \setminus W = X \setminus D$ aperto

$$\text{e naturalmente } \overset{\circ}{D} \cap (X \setminus D) = \emptyset$$



□

proposizione

Gli assiomi T_1 e T_2 passano a sottospazi e prodotti, cioè:

(1) se X è T_i , allora ogni sottospatto di X è T_i

(2) se $\forall i \in I X_i$ è T_j , allora $\prod_{i \in I} X_i$ è T_j (vale il se e solo se)

DIMOSTRAZIONE

Vediamo (1), (2) per T_2 .

(1) Se $Y \subseteq X$ e $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$, se X è T_2 , esistono intorni, che posso
supporre aperti, U, V di y_1 e y_2 in X t.c. $U \cap V = \emptyset$.

Allora $U \cap Y$ è aperto in Y e contiene y_1 , per cui è un intorno di y_1 in Y .

Analogamente $V \cap Y$ è intorno di y_2 in Y e $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \emptyset$

(2) se $\forall i \in I, X_i$ è T_2 , dati punti $(x_i)_{i \in I}$ e $(y_i)_{i \in I}$ di $\prod_{i \in I} X_i$

se $(x_i)_{i \in I} \neq (y_i)_{i \in I}$, $\exists i_0 \in I$ t.c. $x_{i_0} \neq y_{i_0}$

Ma X_{i_0} è T_2 , quindi $\exists U, V$ aperti di X_{i_0} con $x_{i_0} \in U, y_{i_0} \in V, U \cap V = \emptyset$.

Ma allora $\pi_{i_0}^{-1}(U)$ e $\pi_{i_0}^{-1}(V)$ sono aperti disgiunti di $\prod_{i \in I} X_i$

che contengono rispettivamente $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$

□

proposizione T_3 passa ai sottospazi, mentre
 T_4 passa ai sottospazi chiusi
 (esistono esempi di sottospazi non T_4 di spazi T_4)

DIMOSTRAZIONE

(1) Sia $Y \subseteq X$, X T_3 , e siano $p \in Y$ e $C \subseteq Y$ chiuso di Y t.c. $p \notin C$

Per definizione di topologia di sottospazio,

$\exists C' \subseteq X$ chiuso t.c. $C = C' \cap Y$

Osserviamo che $p \notin C'$, altrimenti $p \in C' \cap Y = C \nabla$

Dunque, poiché X è T_3 , $\exists U, V$ aperti di X t.c. $p \in U, C' \subseteq V, U \cap V = \emptyset$

Ma allora $U \cap Y$ e $V \cap Y$ sono aperti di Y

t.c. $p \in U \cap Y, C \subseteq C' \cap Y \subseteq V \cap Y$.

(2) Sia X T_4 e $Y \subseteq X$ è chiuso, dati $C_1, C_2 \subseteq Y$ chiusi disgiunti,

allora C_1, C_2 sono chiusi in X

Dunque $\exists U, V \subseteq X$ aperti t.c. $C_1 \subseteq U, C_2 \subseteq V, U \cap V = \emptyset$.

si conclude considerando $U \cap Y, V \cap Y$.

Dove si blocca la dimostrazione se Y non è chiuso?

Come in (1), $\exists C'_1, C'_2 \subseteq X$ chiusi t.c. $C_1 = C'_1 \cap Y$ e $C_2 = C'_2 \cap Y$

Posso applicare l'assioma T_4 a C'_1, C'_2 ?

No, perché da $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ non posso dedurre $C'_1 \cap C'_2 = \emptyset$

Ad esempio, se $X = \mathbb{R}, Y = (0,1) \cup (1,2)$, posto $C_1 = (0,1), C_2 = (1,2)$,

che sono chiusi in Y in quanto $C_1 = [0,1] \cap Y, C_2 = [1,2] \cap Y$,

se C'_1 è un chiuso di $X = \mathbb{R}$ che contiene C_1 , allora $C'_1 \supseteq \bar{C}_1 = [0,1]$

e analogamente un chiuso di \mathbb{R} che contiene C_2 ,

allora $C'_2 \supseteq \bar{C}_2 = [1,2]$

□

Per avere un esempio di spazio T_4 con un sottospazio non T_4 ,

basta osservare che ogni spazio Y è (omeomorfo a)

un sottospazio di uno spazio T_4 X così ottenuto:

$X = Y \amalg \{\infty\}$, e gli aperti di X sono tutti e soli
 gli aperti di Y e X stesso (è una topologia)

Ora se $C \subseteq X$ è un chiuso non vuoto, $\infty \in C$,

dunque non esistono chiusi disgiunti non vuoti di X , e X è T_4 .

proposizione Dato un insieme di indici I , se X_i è T_3 $\forall i \in I$,
allora $\prod_{i \in I} X_i$ è T_3

DIMOSTRAZIONE

Sia $x = (x_i)_{i \in I} \in X = \prod_{i \in I} X_i$ e $C \subseteq X$ chiuso con $x \notin C$

Quindi $A = X \setminus C$ è aperto e $x \in A$

Basta quindi trovare un aperto U t.c. $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq A$

Sia $V = \prod_{i \in I} V_i$ aperto di base t.c. $x \in V \subseteq A \Rightarrow x_i \in V_i \subseteq X_i$.

Poiché X_i è T_3 , $\exists W_i \subseteq X_i$ aperto t.c. $x_i \in W_i \subseteq \bar{W}_i \subseteq V_i$ (se $V_i \neq X_i$)

Se invece $V_i = X_i$, pongo $W_i = X_i$ (aperto e chiuso)

Sia $U = \prod_{i \in I} W_i$ aperto di base di X t.c. $x \in U$. Allora

$$x \in \overline{\prod_{i \in I} W_i} \subseteq \underbrace{\prod_{i \in I} \bar{W}_i}_{\text{chiuso perché}} \subseteq \prod_{i \in I} V_i = V \subseteq A$$

prodotto di chiusi

Infatti, in generale, se $C_i \subseteq X_i$ è chiuso $\forall i \in I$,

allora $\prod_{i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(C_i)$ è chiuso perché intersezione di chiusi.

$\Rightarrow x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq A$ con U aperto

$\Rightarrow X = \prod_{i \in I} X_i$ è T_3 □

ricoprimenti

DEF. Sia X topologico.

Un **ricoprimento** $\mathcal{U} = \{A_i, i \in I\}$ di X è un sottoinsieme

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ t.c. } X = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Si dice **aperto** se ogni A_i è aperto

Si dice **chiuso** se ogni A_i è chiuso

Si dice **localmente finito** se $\{A_i\}_{i \in I}$ è localmente finita

DEF. sia $A_i, i \in I$ una famiglia di sottoinsiemi di X

Tale famiglia è **localmente finita** se $\forall p \in X$

$\exists \mathcal{U}$ intorno di p t.c. $\{i \in I \text{ t.c. } A_i \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$ sia finito

esempio (1) $\{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di \mathbb{R}

(2) $\{[-n, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento chiuso ma non localmente finito di \mathbb{R}

DEF. Un ricoprimento \mathcal{U} di X è **fondamentale** se vale la seguente proprietà:

$$\Omega \subseteq X \text{ è aperto} \iff \Omega \cap A_i \text{ è aperto in } A_i \quad \forall i \in I$$

Fatti: (1) (\implies) vale sempre per definizione di topologia di sottospazio

(2) è equivalente chiedere che

$$C \subseteq X \text{ è chiuso} \iff C \cap A_i \text{ è chiuso in } A_i \quad \forall i \in I$$

(3) non tutti i ricoprimenti sono fondamentali

esempio $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea e

$\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$, è chiaro che, dato $Y \subseteq X$,

si ha $\forall n \{x\}$ è aperto in $\{x\}$, ma non tutti gli $Y \subseteq X$ sono aperti

teorema Un ricoprimento aperto è fondamentale

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{U} = \{A_i, i \in I\}$ un ricoprimento e $\Omega \subseteq X$

t.c. $\Omega \cap A_i$ è aperto in $A_i \quad \forall i \in I$.

Poiché aperto di un aperto è aperto nello spazio ambiente

e A_i è aperto di X , $\Omega \cap A_i$ è aperto di X .

Donque $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega \cap A_i$ è aperto in quanto unione di aperti \square

R controesempio sopra mostra che i ricoprimenti chiusi in generale non sono fondamentali.

Lemma Sia $\{D_i, i \in I\}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi di X .
Allora $\overline{\bigcup_{i \in I} D_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{D_i}$

DIMOSTRAZIONE

Abbiamo già visto che vale per unione finita

d'inclusione $\overline{\bigcup_{i \in I} D_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{D_i}$ vale sempre, in quanto

$$\forall i \in I, D_i \subseteq \bigcup_{i \in I} D_i \Rightarrow \overline{D_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} D_i} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \overline{D_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} D_i}$$

Per l'altra inclusione, sia $p \in \overline{\bigcup_{i \in I} D_i}$.

Per ipotesi, $\exists U$ intorno (aperto) di p t.c. $\{i \in I \text{ t.c. } U \cap D_i \neq \emptyset\} = \{i_1, \dots, i_n\}$ è finito.

Sia W un qualsiasi intorno di p . Allora $W \cap U$ è intorno di p ,

per cui essendo $p \in \overline{\bigcup_{i \in I} D_i}$, si ha $W \cap U \cap \bigcup_{i \in I} D_i \neq \emptyset$

poiché $U \cap D_i = \emptyset \forall i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$, si ha che $W \cap U \cap \bigcup_{j=1}^n D_{i_j} \neq \emptyset$

$$\Rightarrow W \cap \bigcup_{j=1}^n D_{i_j} \neq \emptyset, \text{ dunque } p \in \overline{\bigcup_{j=1}^n D_{i_j}} = \bigcup_{j=1}^n \overline{D_{i_j}} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{D_i}$$

□

teorema Un ricoprimento chiuso localmente finito è fondamentale

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che un'unione localmente finita di chiusi è chiusa, infatti

$$\overline{\bigcup_{i \in I} C_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{C_i} = \bigcup_{i \in I} C_i$$

Sia ora $\{D_i, i \in I\}$ un ricoprimento chiuso localmente finito di X e

sia $Y \subseteq X$ t.c. $Y \cap D_i$ sia chiuso in $D_i \forall i \in I$.

Poiché chiuso in un chiuso è chiuso, $Y \cap D_i$ è chiuso in X , e dalla locale finitezza di $\{D_i\}$ segue la locale finitezza di $\{Y \cap D_i\}$

Dunque $Y = \bigcup_{i \in I} (Y \cap D_i)$ è unione localmente finita di chiusi, e perciò è chiuso □

teorema Sia $\mathcal{U} = \{A_i, i \in I\}$ un ricoprimento fondamentale di X e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione. Allora
 f è continua $\iff f|_{A_i}: A_i \rightarrow Y$ è continua $\forall i \in I$.

DIMOSTRAZIONE

(\implies) è sempre vera

(\impliedby) Sia $\Omega \subseteq Y$ un aperto. Poiché $f|_{A_i}$ è continua,

$$f|_{A_i}^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\Omega) \cap A_i \text{ è aperto in } A_i \forall i \in I.$$

Per definizione di ricoprimento fondamentale,

$f^{-1}(\Omega)$ è aperto in X , per cui f è continua □

esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(1) Se $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ è continua e $f|_{\{0\}}$ è continua, non è detto che f sia continua

(2) Se $f|_{[0, +\infty)}$ è continua e $f|_{(-\infty, 0]}$ è continua, allora f è continua

perché $(-\infty, 0], [0, +\infty)$ è un ricoprimento chiuso finito, dunque fondamentale

(3) il fatto (2) vale $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow Y$, dove Y è topologico qualsiasi

connessione

DEF. Sia X topologico

X si dice **connesso** se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- (1) non esiste una partizione di X in due aperti disgiunti non vuoti
 $\nexists A, B$ aperti, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$
- (2) non esiste una partizione di X in due chiusi disgiunti non vuoti
 $\nexists A, B$ chiusi, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$
- (3) l'unico sottosinsieme $A \subseteq X$ aperto, chiuso e non vuoto è X stesso

Il fatto che siano equivalenti è semplice:

(1) \Leftrightarrow (2) passando ai complementari

(per una partizione $X = A \sqcup B$, A e B sono aperti $\Leftrightarrow A, B$ sono chiusi
poiché $A = X \setminus B$ e $B = X \setminus A$)

(1) \Leftrightarrow (3) se $X = A \sqcup B$, con A e B aperti non vuoti,

allora A è sia aperto, sia chiuso, non vuoto, diverso da X ($B \neq \emptyset$).

Viceversa, se A è aperto, chiuso, non vuoto e $\neq X$,

allora $X = A \sqcup (X \setminus A)$ è una partizione in aperti non banali.

L'esempio fondamentale di spazio connesso è dato dal seguente teorema.

teorema $[0, 1]$ è connesso

DIMOSTRAZIONE

Sia $A \subseteq [0, 1]$ un aperto, chiuso e diverso dal vuoto.

Se fosse $A \neq [0, 1]$, a meno di scambiare A con il suo complementare

(che è ancora aperto e chiuso) posso supporre $0 \in A$.

Sia $\Omega = \{t \in [0, 1] \mid [0, t] \subseteq A\}$

Poiché $0 \in A$, $[0, 0] \subseteq A$ per cui $0 \in \Omega$, quindi $\Omega \neq \emptyset$.

Sia $\bar{\tau} = \sup \Omega$, che è ben definito perché $\Omega \neq \emptyset$ e $\Omega \subseteq [0, 1]$.

La tesi è equivalente a $\bar{\tau} = 1$.

Vediamo innanzitutto che $\bar{\tau} = \max \Omega$, per cui $\bar{\tau} \in \Omega$.

Essendo $\bar{\tau} = \sup \Omega$, $\exists \{t_n\}$ con $t_n \in \Omega$ e $t_n \rightarrow \bar{\tau}$ dal basso ($t_n \leq \bar{\tau} \forall n$)

per cui $[0, t_n] \subseteq A \forall n$, da cui $[0, \bar{\tau}) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, t_n] \subseteq A$.

Poiché A è chiuso, $[0, \bar{\tau}) \subseteq A$, per cui $\bar{\tau} \in A$ e quindi $\bar{\tau} = \max \Omega$.

Se per assurdo $\bar{\tau} < 1$, poiché A è aperto in $[0, 1]$, esiste $\varepsilon > 0$ t.c.

$(\bar{\tau} - \varepsilon, \bar{\tau} + \varepsilon) \cap [0, 1] \subseteq A$.

Ma allora, scelto $0 < \varepsilon < 1 - \bar{\tau}$ (posso sempre farlo diminuendo l' ε dato):

$[0, \bar{\tau} + \varepsilon) = [0, \bar{\tau}] \cup (\bar{\tau} - \varepsilon, \bar{\tau} + \varepsilon) \subseteq A$ e $[0, \bar{\tau} + \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq A$,

cioè $\bar{\tau} + \frac{\varepsilon}{2} \in \Omega$ contro il fatto $\bar{\tau} = \max \Omega$.

□

DEF. X si dice **connesso per archi** se $\forall x, y \in X$
 \exists un arco γ , cioè una funzione continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$

proposizione Sia $f: X \rightarrow Y$ continua
 (1) Se X è connesso, $f(X)$ è connesso.
 (2) Se X è connesso per archi, $f(X)$ è connesso per archi.

DIMOSTRAZIONE

- (1) Per assurdo, sia $f(X)$ sconnesso, cioè siano A, B aperti di $f(X)$ disgiunti non vuoti con $f(X) = A \cup B$
 Poiché $f: X \rightarrow f(X)$ è continua, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti di X non vuoti perché $f: X \rightarrow f(X)$ è surgettiva e disgiunti, per cui X è sconnesso \downarrow
 (è chiaro che $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$)
- (2) Siano $y_1, y_2 \in f(X)$: per definizione $\exists x_1, x_2 \in X$ t.c. $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$
 Poiché X è connesso per archi, esiste un arco $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Ma allora $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow f(X)$ è un arco continuo che connette $f(\gamma(0)) = f(x_1) = y_1$ e $f(\gamma(1)) = f(x_2) = y_2$.

teorema X connesso per archi $\Rightarrow X$ connesso

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo, sia X sconnesso: $X = A \cup B$ con A, B aperti non vuoti.
 Siano $x_0 \in A, x_1 \in B$ (perché $A, B \neq \emptyset$). Sia γ un cammino tra x_0 e x_1 .
 Gli insiemi $\gamma^{-1}(A)$ e $\gamma^{-1}(B)$ sono aperti (γ è continua), disgiunti, non vuoti ($0 \in \gamma^{-1}(A), 1 \in \gamma^{-1}(B)$) e ricoprono $[0, 1]$.
 Dunque $[0, 1]$ è sconnesso \downarrow . □



DEF. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se $\forall v, w \in \Omega$,
 $\{tv + (1-t)w \mid t \in [0, 1]\} \subseteq \Omega$ (segmento di estremi v e w)

proposizione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso è connesso per archi, dunque connesso.

DIMOSTRAZIONE

Dati $p, q \in \Omega$, l'arco $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$,
 $\gamma(t) = (1-t)p + tq$ è continuo, congiunge p e q
 ed è contenuto in Ω (perché Ω è convesso) □

Fatto I connessi di \mathbb{R} si chiamano anche intervalli

teorema $A \subseteq \mathbb{R}$. Sono fatti equivalenti:

- (1) A è connesso (A è un intervallo)
- (2) A è connesso per archi
- (3) A è connesso

(Per sottoinsiemi di \mathbb{R} , la connessione è equivalente alla connessione per archi.)

DIMOSTRAZIONE

(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) visto sopra

(3) \Rightarrow (1): Mostriamo che se A non è connesso, allora A non è connesso.

A non connesso $\Rightarrow \exists a_0, a_1 \in A$ t.c. $[a_0, a_1] \not\subseteq A$

$\Rightarrow \exists a_0 < \bar{\epsilon} < a_1$ con $a_0, a_1 \in A$ ma $\bar{\epsilon} \notin A$

Allora $A = (A \cap (-\infty, \bar{\epsilon})) \cup (A \cap (\bar{\epsilon}, +\infty))$, aperti di A ,

disgiunti e non vuoti perché $a_0 \in A \cap (-\infty, \bar{\epsilon})$ e $a_1 \in A \cap (\bar{\epsilon}, +\infty)$



□

Lemma Siano $A \subseteq Z \subseteq X$, X topologico,
e sia \bar{A}^Z la chiusura di A in Z .
Allora $\bar{A}^Z = \bar{A} \cap Z$

DIMOSTRAZIONE

Per definizione di chiusura:

$$\bar{A}^Z = \bigcap_{\substack{C \\ A \subseteq C \\ C \text{ chiuso di } Z}} C = \bigcap_{\substack{C' \text{ chiuso di } X \\ A \subseteq C'}} (C' \cap Z) = Z \cap \bigcap_{\substack{C' \text{ chiuso di } X \\ A \subseteq C'}} C' = Z \cap \bar{A}$$

□

NOTA. se sostituiamo alla chiusura la parte interna, l'enunciato è falso

esempio $A = \{0\}$, $Z = \{0\}$, $X = \mathbb{R}$

la parte interna di A in Z è $\{0\}$

la parte interna di A in X è \emptyset

Anche meno drasticamente: $Z = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2 = X$

$\forall A \subseteq Z$, $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{Z} = \emptyset$ ma esistono molti $A \subseteq Z$

la cui parte interna in Z è $\neq \emptyset$, ad esempio $A = (0, 1) \times \{0\}$

Lemma $Y \subseteq Z \subseteq \bar{Y} = X$
 Se Y è connesso, Z è connesso.

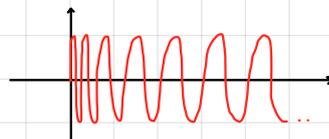
DIMOSTRAZIONE

Sia A un sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto di Z .
 Notiamo che Y è denso in Z , in quanto $\bar{Y}^Z = \bar{Y} \cap Z = Z$.
 Poiché un aperto non vuoto interseca sempre un denso, $A \cap Y \neq \emptyset$.
 Ma allora, essendo A aperto e chiuso in Z , $A \cap Y$ è aperto e chiuso in Y . Poiché Y è connesso e $A \cap Y \neq \emptyset$, allora $A \cap Y = Y$, cioè $Y \subseteq A$. Essendo A un chiuso di Z , si ha però che $\bar{A}^Z = A$. Ma allora $A = \bar{A}^Z \supseteq \bar{Y}^Z = Z$, dunque $A = Z$. \square

Corollario Se $Y \subseteq X$ è connesso, anche \bar{Y} è connesso.

Cerchiamo ora di costruire un controesempio di spazio connesso ma non connesso per archi.

Siamo $Y = \{(x, \sin \frac{1}{x}), x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 = X$
 e $Z = Y \cup \{(0,0)\}$



Y è connesso (per archi) perché immagine del connesso $(0, +\infty)$ tramite $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = (x, \sin \frac{1}{x})$ e φ è continua. È chiaro che $(0,0) \in \bar{Y}$, ad esempio perché la successione $(\frac{1}{n\pi}, 0)$ è contenuta in Y e tende a $(0,0)$; perciò $Z = Y \cup \{(0,0)\} \subseteq \bar{Y}$, e perciò, per il lemma, Z è connesso.

Per vedere che Z non è connesso per archi, basta vedere che un qualsiasi cammino continuo $\gamma: [0,1] \rightarrow Z$ con $\gamma(0) = (0,0)$ è necessariamente costante (In particolare, $(0,0)$ non è connesso a nessun altro punto di Z tramite un arco continuo). Vediamo che $\gamma^{-1}((0,0))$ è aperto e chiuso in $[0,1]$, per cui, essendo $0 \in \gamma^{-1}((0,0))$, $\gamma^{-1}((0,0))$ sarà tutto $[0,1]$, cioè γ sarà costante. Essendo preimmagine di un punto, che è chiuso perché $Z \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{T}_1$, $\gamma^{-1}((0,0))$ è chiuso.

Vediamo che è aperto. Sia $t_0 \in [0,1]$ t.c. $\gamma(t_0) = (0,0)$ e supponiamo per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists t_n \in (t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}) \cap [0,1]$ con $\gamma(t_n) \neq (0,0)$, cioè $\gamma(t_n) = (x_n, \sin \frac{1}{x_n})$.

Idea: tra t_0 e t_n , l'arco γ deve percorrere tutte le oscillazioni tra $(0,0)$ e $(x_n, \sin \frac{1}{x_n})$, che contraddice la continuità in t_0 .

Formalmente: se $\pi: Z \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione sull'asse x , $\pi \circ \gamma$ è continua, per cui $\pi \circ \gamma([t_0, t_n])$ (se $t_n > t_0$) o $\pi \circ \gamma([t_n, t_0])$ (se $t_n < t_0$) è un connesso di \mathbb{R} che contiene $\pi \circ \gamma(0) = 0$ e $\pi \circ \gamma(t_n) = x_n$, perciò, essendo i connessi di \mathbb{R} gli intervalli, contiene tutto $[0, x_n]$ e in particolare contiene un punto della forma $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, per cui $\gamma([t_0, t_n])$ (o $\gamma([t_n, t_0])$) contiene un punto della forma $(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)) = (y_n, 1)$ con y_n compreso fra 0 e x_n . In definitiva, $\forall n \geq 1$ ho trovato un valore t_n con $t_n \in (t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n})$ t.c. l'ordinata di $\gamma(t_n)$ sia uguale a 1. Questo contraddice la continuità di γ in t_0 , visto che $\gamma(t_0) = (0,0)$.

proposizione Se X e Y sono connessi, allora $X \times Y$ è connesso

DIMOSTRAZIONE

Siano $A, B \subseteq X \times Y$ aperti non vuoti t.c. $X \times Y = A \cup B$. Mostriamo che $A \cap B \neq \emptyset$

Osserviamo che $\pi_X(A), \pi_X(B)$ sono aperti non vuoti di X t.c. $\pi_X(A) \cup \pi_X(B) = X$

Poiché X è connesso, $\pi_X(A) \cap \pi_X(B) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in \pi_X(A) \cap \pi_X(B)$

Analogamente su Y , $\exists y_0 \in \pi_Y(A) \cap \pi_Y(B)$

Quindi $(x_0, y_0) \in A \cap B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow X \times Y$ è connesso \square

proposizione Se X e Y sono connessi per archi, allora $X \times Y$ è connesso per archi

DIMOSTRAZIONE

Siano $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$.

Poiché $\{x_1\} \times Y \cong Y$ è connesso per archi, $\exists \gamma_1$ cammino che porta (x_1, y_1) in (x_1, y_2) .

Analogamente su $X \times \{y_2\}$, $\exists \gamma_2$ cammino che porta (x_1, y_2) in (x_2, y_2) .

Quindi la giunzione $\gamma_1 * \gamma_2$ è un cammino che porta (x_1, y_1) in (x_2, y_2) , e dunque $X \times Y$ è connesso per archi. \square

componenti connesse

Lemma Se X è uno spazio topologico, $x_0 \in X$,
 $\{Y_i\}_{i \in I}$ sottospazi di X connessi e t.c. $x_0 \in Y_i$.
Allora $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è connesso.

DIMOSTRAZIONE

Sia $A \subseteq Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ un aperto, chiuso, non vuoto.

Voglio mostrare che $A = Y$.

Se $A = Y$, ho finito. Altrimenti, $Y \setminus A$ è aperto, chiuso, non vuoto.

Uno tra A e $Y \setminus A$ contiene x_0 . Supponiamo WLOG che $x_0 \in A$.

Ora $A \cap Y_i = Y_i$ è aperto, chiuso, non vuoto (contiene x_0).

(Se $Z \subseteq Y = X$ e Y e Z hanno la topologia di sottospazio di X ,
allora la topologia di sottospazio di Z indotta da Y
coincide con quella indotta da X)

Per connessione di Y_i , $A \cap Y_i = Y_i$, dunque $Y_i \subseteq A$.

Segue che $\bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq A \subseteq Y \Rightarrow A = Y$. □

Def Se $x_0 \in X$, la **componente connessa** di x_0 in X , $C(x_0)$,
è il più grande sottoinsieme connesso di X che contiene x_0 .

La definizione è ben posta per il lemma: è chiaro

che si ha $C(x_0) = \bigcup_{\substack{C \text{ connesso} \\ x_0 \in C}} C$

e c'è almeno un connesso che contiene x_0 , $\{x_0\}$.

Proposizione (1) Le componenti connesse sono chiuse.
(2) Le componenti connesse formano una partizione di X .

DIMOSTRAZIONE

(1) Si è visto che la chiusura di un connesso è connesso.

Quindi, se $x_0 \in X$, $\overline{C(x_0)}$ è un connesso che contiene x_0 .

Per definizione $\overline{C(x_0)} \subseteq C(x_0) \Rightarrow C(x_0) = \overline{C(x_0)}$, cioè $C(x_0)$ è chiusa.

(2) Voglio mostrare che $\{C(x_0) \mid x_0 \in X\}$ è una partizione di X .

Questi sottoinsiemi ricoprono X perché $x_0 \in C(x_0)$.

Inoltre, se $C(x_0) \cap C(x_1) \neq \emptyset$, preso $y \in C(x_0) \cap C(x_1)$ e

applicando il lemma, si conclude che $C(x_0) \cup C(x_1)$ è un connesso.

Ora per def $C(x_0), C(x_1) \subseteq C(x_0) \cup C(x_1)$, quindi per definizione di

componente connessa, $C(x_0) = C(x_0) \cup C(x_1) = C(x_1)$. □

corollario Se X ha un numero finito di componenti connesse, queste sono anche aperte

DIMOSTRAZIONE

Se $X = \bigcup_{i=1}^n C_i$, dove C_i sono le componenti connesse,
 $C_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} C_j$ è aperto $\forall i=1, \dots, n$ \square

DEF Uno spazio X è **totalmente sconnesso** se le sue componenti connesse sono tutti e soli i punti di X .

Oss In generale, le componenti connesse non sono aperte

esempio Facciamo vedere che $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è **totalmente sconnesso**
 Supponiamo per assurdo che $C \subseteq \mathbb{Q}$ sia un connesso con almeno due punti, x_0 e x_1 , WLOG $x_0 < x_1$.

Sia $r \in (x_0, x_1)$ irrazionale: $C = (C \cap (-\infty, r)) \cup (C \cap (r, +\infty))$

C_1 e C_2 sono due aperti, disgiunti, non vuoti di C ∇

Si poteva anche notare che i connessi di \mathbb{Q} sono i connessi di \mathbb{R} contenuti in \mathbb{Q}

DEF Un **cammino** o **arco** in X è una funzione continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$

DEF Se $\gamma, \gamma': [0, 1] \rightarrow X$ sono due cammini t.c. $\gamma(1) = \gamma'(0)$, la loro **giunzione** $\gamma * \gamma'$ è il cammino definito da

$$(\gamma * \gamma')(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \gamma'(2t-1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

È chiaro che $(\gamma * \gamma')(0) = x_0$, $(\gamma * \gamma')(1) = x_2$

ed è continua perché $\{[0, 1/2], [1/2, 1]\}$ è un ricoprimento chiuso finito, quindi fondamentale, di $[0, 1]$ e le funzioni $t \mapsto \gamma(2t)$, $t \mapsto \gamma'(2t-1)$ sono continue.

Consideriamo la relazione di equivalenza su X :

$x_0 \sim x_1 \iff$ esiste un cammino da x_0 a x_1 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ t.c. $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$

proposizione \sim è una relazione di equivalenza.

DIMOSTRAZIONE

(1) $x_0 \sim x_0$, ad esempio tramite il cammino costante

(2) $x_0 \sim x_1 \implies x_1 \sim x_0$

Se $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ è un cammino con $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$, allora $\bar{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X$, con $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ (continua), è un cammino con $\bar{\gamma}(0) = \gamma(1) = x_1$, $\bar{\gamma}(1) = \gamma(0) = x_0$

(3) $x_0 \sim x_1$, $x_1 \sim x_2 \implies x_0 \sim x_2$

Siano $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ un cammino tra x_0 e x_1 e

$\gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ un cammino tra x_1 e x_2 .

Il cammino $\gamma_1 * \gamma_2$ è tale che $(\gamma_1 * \gamma_2)(0) = x_0$ e $(\gamma_1 * \gamma_2)(1) = x_2$ quindi $x_0 \sim x_2$ \square

DEF Se $x_0 \in X$, la componente connessa per archi (cpa) di x_0 , $A(x_0)$, è la classe di equivalenza di x_0 per la relazione \sim .

proposizione

- (1) $x_0 \in A(x_0) \quad \forall x_0 \in X$
- (2) Le componenti cpa formano una partizione di X
- (3) $A(x_0)$ è il più grande connesso per archi che contiene x_0

DIMOSTRAZIONE

(1), (2) : chiari per costruzione

(3): $A(x_0)$ è connesso per archi: infatti, presi $x_1, x_2 \in A(x_0)$,

so che $x_0 \sim x_1, x_0 \sim x_2 \Rightarrow x_1 \sim x_2$

Quindi $\exists \gamma: [0,1] \rightarrow X$ t.c. $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$

ma è chiaro che γ ha valori in $A(x_0)$: se $a \in [0,1]$

e guardo $\gamma(a)$, $\gamma|_{[0,a]}$ "è praticamente" un cammino tra $\gamma(0) = x_1, \gamma(a)$

quindi $\gamma(a) \sim x_1 \sim x_0 \Rightarrow \gamma(a) \in A(x_0)$

Rimane da vedere che se A è cpa e $x_0 \in A$, allora $A = A(x_0)$.

In effetti, se $x_1 \in A$, visto che $x_0 \in A$ e A è cpa, $x_0 \sim x_1$:

$\exists \gamma: [0,1] \rightarrow A$ t.c. $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$.

La composizione $i \circ \gamma: [0,1] \rightarrow X$ è un cammino in X

che collega x_0 e x_1

Segue che $x_1 \in A(x_0)$ e dunque $A = A(x_0)$ □

Oss Visto che cpa \Rightarrow connesso,

si ha $A(x_0) \subseteq C(x_0) \quad \forall x_0 \in X$

In generale non vale l'uguale

Inoltre le componenti cpa non sono né aperte né chiuse

esempio $Y = \{(0,0)\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Si è visto che Y è connesso, ma non è connesso per archi

È chiaro che le componenti cpa di Y sono $\{(0,0)\}$ e il suo complementare.

Si ha che $\{(0,0)\}$ è chiuso ma non aperto, e il suo complementare

è aperto ma non chiuso.

DEF Uno spazio topologico X si dice localmente connesso per archi se $\forall x_0 \in X$ esiste un sfi di x_0 connessi (per archi)

esempio (1) Un aperto di \mathbb{R}^n è loc. cpa
 (perché le palle aperte sono cpa)
 e quindi anche localmente connesso.

(2) \mathbb{R} "pettine infinito"
 $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \times \mathbb{R}$

X è cpa ma non localmente cpa.

È cpa: è facile vedere che $(0,0) \sim (x_0, y_0) \forall (x_0, y_0) \in X$

Basta collegare $(0,0)$ con $(x_0,0)$ con un cammino orizzontale
 e poi $(x_0,0)$ con (x_0, y_0) con un cammino verticale

Non è localmente cpa: guardiamo $(0,1) \in X$. Se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è un SFI di $(0,1)$,
 allora per definizione $\exists i \in I$ t.c. $U_i \ni (0,1)$

Visto che U_i è intorno di $(0,1)$,

$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B((0,1), \varepsilon) \cap X \subseteq U_i$

Per concludere, si mostra che $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ t.c. $U_i \cap \{x < r\}$ e $U_i \cap \{x > r\}$
 danno una partizione di U_i in aperti non vuoti, quindi U_i non è cpa.



teorema Se X è uno spazio topologico localmente connesso per archi e connesso, allora è connesso per archi.

DIMOSTRAZIONE

Prendiamo $x_0 \in X$ e consideriamo $A(x_0)$ la sua componente cpa.

Voglio mostrare che $A(x_0) = X$. Mostriamo che $A(x_0)$ è aperto e chiuso,
 per connessione poi segue $A(x_0) = X$.

Mostriamo che è aperto: è intorno di ogni suo punto.

Sia $x_1 \in A(x_0)$, cioè $x_1 \sim x_0$

Visto che X è localmente cpa, $\exists U$ intorno di x_1 cpa

Dico che $U \subseteq A(x_0)$: se $x_2 \in U$, $x_2 \sim x_1$, quindi $x_2 \sim x_0$, cioè $x_2 \in A(x_0)$

È anche chiuso perché le cpa sono una partizione,

quindi $A(x_0) = X \setminus \bigcup_{x \in X} A(x)$

Quindi $A(x_0)$ è aperto e chiuso, quindi $A(x_0) = X$. □

proposizione Se X è localmente cpa, allora

(1) le componenti cpa di X sono aperte e chiuse

(2) se $U \subseteq X$ è aperto, U è localmente cpa

(3) Tutti gli aperti connessi di X sono anche cpa.

DIMOSTRAZIONE

(1) Visto nel teorema

(2) Se $U \subseteq X$ è aperto, $x_0 \in U$ e $\mathcal{U} = \{U_i\}$ è SFI di x_0 con U_i cpa, allora

$\mathcal{U}' = \{U_i \mid U_i \subseteq U\} \subseteq \mathcal{U}$ è SFI di x_0 in U

(se V è un intorno di x_0 in U , $x_0 \in V \subseteq U$, allora V è un intorno di x_0 in X)

Donque $\exists i$ t.c. $U_i \subseteq V \subseteq U \Rightarrow U_i \in \mathcal{U}'$

(3) Se $U \subseteq X$ è aperto, è loc. cpa per (2), e se è connesso,
 per il teorema è cpa. □

Il punto π_0

Usando la connessione si può dimostrare che \mathbb{R} non è omeomorfo a \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ (è anche vero che $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n=m$, ma servono strumenti più avanzati)

Infatti, se per assurdo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ omeomorfismo, $n \geq 2$, allora preso $x \in \mathbb{R}$, la restrizione di f :

$$f|_{\mathbb{R} \setminus \{x\}}: \mathbb{R} \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\} \text{ è ancora un omeomorfismo}$$

(segue dalla def. di topologia di sottospazio e dalla proprietà universale)

(Più generale, se $f: X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo, e $Z \subseteq X$ sottinsieme, allora

$$f|_{X \setminus Z}: X \setminus Z \rightarrow Y \setminus f(Z) \text{ è ancora un omeomorfismo})$$

Questo è assurdo perché $\mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, +\infty)$ è sconnesso, mentre

$\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ per $n \geq 2$, è spa (due punti sono connessi dal segmento che li congiunge se $f(x)$ non ci sta, altrimenti si "gira intorno" a $f(x)$)

Allo stesso modo, se X e Y sono due spazi con un numero diverso di componenti connesse (anche infinito), allora X e Y non sono omeomorfi.

Più sistematicamente, se X è uno spazio topologico, si definisce

$$\pi_0(X) = \{ \text{insieme delle componenti connesse per archi di } X \} = X/\sim$$

dove $x \sim y$ se sono connessi da un cammino

Se $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua, induce una funzione

$$\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$$

$$X/\sim \rightarrow Y/\sim$$

$$x \sim y \mapsto f(x) \sim f(y)$$

$$\gamma: [0,1] \rightarrow X \mapsto f \circ \gamma: [0,1] \rightarrow Y$$

Inoltre

$$\bullet \pi_0(\text{id}_X) = \text{id}_Y$$

• se $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ continue, allora

$$\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$$

Si dice che π_0 è un functore dalla categoria degli spazi topologici

alla categoria degli insiemi:

$$\pi_0: (\text{Top}) \rightarrow (\text{Set})$$

$$X \mapsto \pi_0(X)$$

$$f: X \rightarrow Y \mapsto \pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$$

Conseguenza: se $f: X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora

$$\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y) \text{ è una bijezione}$$

(segue dalle proprietà elementari)

Quindi, se $|\pi_0(X)| \neq |\pi_0(Y)|$, X e Y non sono omeomorfi

Oss chiaramente non vale il viceversa, cioè può essere

$$|\pi_0(X)| = |\pi_0(Y)| \text{ ma } X \text{ non è omeomorfo a } Y$$

esempio $X = \{*\}$, $Y = [0,1]$

compattezza

DEF. Uno spazio topologico X si dice **compatto** se da ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito, cioè $\exists J \subseteq I, J \text{ finito t.c. } \bigcup_{i \in J} U_i = X$

esempio (1) $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, non è compatto

Infatti, $\mathcal{U} = \{B(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto e non ammette sottoricoprimenti finiti

(2) Più in generale, se X è metrizzabile, e d è una distanza che induce la topologia, se X è compatto allora d è limitata, cioè $\exists k \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ t.c. $d(x, y) < k \quad \forall x, y \in X$

Infatti, fissato $x_0 \in X$, considero il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{B(x_0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e se X è compatto, deve esistere un sottoricoprimento finito $B(x_0, n_1), \dots, B(x_0, n_k)$.

Visto che $B(x_0, n_i) \subseteq B(x_0, N)$ con $N = \max\{n_i\}$, avrò $X = B(x_0, N)$

Quindi, se $x, y \in X$, ho che $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < 2N$

(Il viceversa non è vero: una qualsiasi distanza d è topologicamente equivalente alla distanza limitata $d' = d \wedge 1$)

(3) Se X è uno spazio topologico con un numero finito di punti, X è compatto

(4) Se X ha la topologia indiscreta, allora è compatto

DEF. Diciamo che una famiglia di sottoinsiemi $\{Y_i\}_{i \in I}$ di X ha la **proprietà dell'intersezione finita (PIF)** se $\forall J \subseteq I$ finito si ha che $\bigcap_{i \in J} Y_i \neq \emptyset$

esempio (1) $X = \mathbb{R}, Y_i = [i, +\infty), i \in \mathbb{N}$

la famiglia $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ha la PIF

Notare che $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} [i, +\infty) = \emptyset$

(2) $X = [0, 1], Y_i = [0, \frac{1}{i}], i \in \mathbb{N}$

la famiglia $\{Y_i\}$ ha la PIF e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{i}] = \{0\} \neq \emptyset$

proposizione Se X è uno spazio topologico, allora X è compatto se e solo se qualsiasi famiglia $\{Y_i\}_{i \in I}$ di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita, soddisfa $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$

DIMOSTRAZIONE

Basta passare ai complementari:

se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di X , $C_i = X \setminus U_i$ è un chiuso,

e se $J \subseteq I$, si ha $\bigcap_{i \in J} C_i = \bigcap_{i \in J} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i$

Quindi $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di $X \iff \bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$

Dunque chiedere che, se \mathcal{U} è un ricoprimento di aperti (cioè $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$)

allora $\exists J \subseteq I$ finito t.c. $\{U_i\}_{i \in J}$ è un ricoprimento (cioè $\bigcup_{i \in J} U_i = X$),

equivale a chiedere che se $\{C_i\}_{i \in I}$ ha la PIF, allora $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$

(viceversa, se partito da una famiglia di chiusi $\{C_i\}_{i \in I}$, $U_i = X \setminus C_i$

sono una famiglia di aperti, ...)

□

corollario Se X è compatto e $C_n, n \in \mathbb{N}$, sono chiusi inscatolati non vuoti, cioè $C_{n+1} \subseteq C_n \forall n$, allora $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$

teorema $[0,1]$ è compatto

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $[0,1]$

Sia $A = \{t \in [0,1] \mid \exists J \subseteq I \text{ finito t.c. } [0,t] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i\}$

Voglio mostrare che $1 \in A$.

(1) $0 \in A$ e $A \neq \{0\}$

Infatti, visto che \mathcal{U} è un ricoprimento, $\exists i_0 \in I : 0 \in U_{i_0}$, e

visto che U_{i_0} è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $[0, \varepsilon] \subseteq U_{i_0}$

Quindi $0 \in A$ e $\frac{\varepsilon}{2} \in A$

(2) A è un intervallo, cioè se $a \in A$ e $a' \leq a$, allora $a' \in A$

Infatti, se $\exists J \subseteq I$ finito t.c. $[0, a] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$

Visto che $[0, a'] \subseteq [0, a]$, allora $a' \in A$

Chiamo $s = \sup A \in [0,1]$

(3) si ha $[0, s] \subseteq A$

segue dal fatto che A è un intervallo:

se $x < s$, allora $\exists a \in A$ t.c. $x \leq a < s$ e quindi $x \in A$.

(4) $s \in A$

Visto che \mathcal{U} è un ricoprimento, $\exists i_0 \in I : s \in U_{i_0}$.

Visto che U_{i_0} è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$.

Per quanto visto, $s - \frac{\varepsilon}{2} \in A$, quindi $\exists J \subseteq I$ finito t.c. $[0, s - \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$

Ora si ha $[0, s] \subseteq (\bigcup_{i \in J} U_i) \cup U_{i_0}$, quindi $s \in A$

(5) si ha $s = 1$.

Se $s < 1$, il ragionamento appena visto mostra che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $s + \frac{\varepsilon}{2} < 1$

e $s + \frac{\varepsilon}{2} \in A$, che contraddice $s = \sup A$

□

Conseguenza: gli intervalli chiusi $[a, b]$ sono compatti

(sono omeomorfi a $[0,1]$ e l'essere compatti

è invariante per omeomorfismo)

mentre (a, b) non lo sono

(visto che sono omeomorfi a $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$,

e sappiamo che \mathbb{R} non è compatto)

Analogamente anche $[a, b)$ e $(a, b]$ non sono compatti

teorema Se $f: X \rightarrow Y$ è continua, e se X è compatto, allora $f(X) \subset Y$ è compatto (immagini continue di compatti sono compatte)

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$ (con la topologia di sottospazio di Y)

Ricordiamo che, per la proprietà universale della topologia di sottospazio, la funzione $f: X \rightarrow f(X)$ è continua. La famiglia $\mathcal{U}' = \{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X .

Per compattezza di X , $\exists J \subseteq I$ finito t.c. $X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)$

Segue che $f(X) = f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(U_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i \in J} U_i$
 f suriettiva

□

Oss Un sottospazio $Y \subseteq X$ è compatto se e solo se

$\forall \{U_i\}_{i \in I}$ famiglia di aperti di X t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, si può estrarre un sottoricoprimento finito, cioè $\exists J \subseteq I$ finito t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ (segue dalla definizione di topologia di sottospazio)

Oss X compatto, $Y = X$, non è detto Y sia compatto

esempio $[0, 1]$ è compatto ma $(a, b) \subset [0, 1]$ non è compatto

proposizione X compatto e $Y = X$ chiuso, allora Y è compatto (chiuso di un compatto è compatto)

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$,

vuolgo mostrare che $\exists J \subseteq I$ finito t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$

$U = X \setminus Y$ è aperto e $\mathcal{U} \cup \{U\}$ è un ricoprimento aperto di X .

Per compattezza, $\exists J \subseteq I$ finito t.c. $\{U_i\}_{i \in J} \cup \{U\}$ è un ricoprimento di X

Ora, visto che $Y \cap U = \emptyset$, e $X = \bigcup_{i \in J} U_i \cup U$, allora $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$

□

Se $Y = X$ è un sottospazio compatto, vale che Y è chiuso in X ?

In generale no.

esempio (1) se X è un insieme, con $|X| \geq 2$, con la topologia indiscreta, allora tutti i sottospazi di X sono compatti, ma qualsiasi sottoinsieme non vuoto e proprio non è chiuso.

(2) Se X è infinito con la topologia cofinita, qualsiasi sottospazio $\emptyset \neq Y = X$ è compatto: (\emptyset è compatto)

la topologia di sottospazio di Y è quella cofinita, quindi se

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di Y , scelgo $i_0 \in I$ t.c. $U_{i_0} \neq \emptyset$,

$Y \setminus U_{i_0}$ è finito, quindi seleziono un aperto U_{i_k} per ogni $y_k \in Y \setminus U_{i_0}$:

$\{U_{i_0}, \dots, U_{i_n}\}$ è un sottoricoprimento finito.

Di nuovo però vale che non tutti i sottoinsiemi di X sono chiusi

(ad esempio $Y = X \setminus \{x\}$, $x \in X$, non è chiuso)

proposizione Se X è T_2 e $Y \subseteq X$ è un sottospazio compatto, allora Y è un chiuso.

DIMOSTRAZIONE

Mostriamo che $X \setminus Y$ è aperto, facendo vedere che è intorno di ogni suo punto.

Fisso $x \in X \setminus Y$: voglio trovare U aperto t.c. $x \in U \subseteq X \setminus Y$

Dato un qualsiasi $y \in Y$, poiché X è T_2 , $\exists U_y, V_y$ aperti di X t.c. $x \in U_y$, $y \in V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$

Ora $\{V_y\}_{y \in Y}$ sono una famiglia di aperti di X t.c. $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} V_y$

Per compattezza di Y , $\exists y_1, \dots, y_k$ t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}$

Sia $V = \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}$ è un aperto di X t.c. $Y \subseteq V$

Sia $U = \bigcap_{i=1}^k U_{y_i}$. Questo è un aperto di X t.c. $x \in U$ e $U \cap V = \emptyset$

Infatti $U \cap V = (\bigcap_{i=1}^k U_{y_i}) \cap (\bigcup_{j=1}^k V_{y_j}) = \bigcup_{j=1}^k (\bigcap_{i=1}^k U_{y_i} \cap V_{y_j}) = \emptyset$

A questo punto $x \in U \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus Y$, U aperto, quindi $X \setminus Y$ è aperto. □

Questa dimostrazione in realtà mostra di più.

proposizione Se X è T_2 e compatto, allora X è regolare

DIMOSTRAZIONE

$T_2 \Rightarrow T_1$, basta mostrare che X è T_3 .

Siano $x \in X$ e $Y \subseteq X$ un chiuso con $x \notin Y$.

Per quanto visto, Y è compatto

La dimostrazione precedente produce due aperti U e V di X

t.c. $x \in U$, $Y \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$. □

proposizione Se X è T_2 e compatto, allora X è normale.

DIMOSTRAZIONE

$T_2 \Rightarrow T_1$, mostriamo che X è T_4

Siano $Y, Z \subseteq X$ due chiusi t.c. $Y \cap Z = \emptyset$.

Voglio trovare $U, V \subseteq X$ aperti t.c. $Y \subseteq U$, $Z \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

X è T_3 , Y, Z sono compatti per quanto visto

Fissato $z \in Z$, cioè $z \notin Y$, la proprietà T_3 dà $U_z, V_z \subseteq X$ aperti t.c.

$Y \subseteq U_z$, $z \in V_z$ e $U_z \cap V_z = \emptyset$

Ora $\{V_z\}_{z \in Z}$ è una famiglia di aperti di X che copre Z .

Per compattezza di Z , $\exists z_1, \dots, z_n$ t.c. $Z \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{z_i} = V$

Sia $U = \bigcap_{i=1}^n U_{z_i}$ è un aperto di X che contiene Y . Come prima $U \cap V = \emptyset$.

Quindi X è T_4 . □

Lemma Se B è una base di X e X è compatto "rispetto a B ",
 (da ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \in B$, si può
 estrarre un sottoricoprimento finito), allora X è compatto.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X .

Per definizione di base, fissato $i \in I$, esiste $B_i \in B$

$$\text{t.c. } U_i = \bigcup_{B \in B_i} B$$

La famiglia $\{B\}_{B \in \bigcup_{i \in I} B_i} = \mathcal{B}$ è un ricoprimento di X di aperti di base

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

Per ipotesi, $\exists B_1, \dots, B_n \in \bigcup_{i \in I} B_i$ t.c. $X = \bigcup_{i=1}^n B_i$

Per costruzione, $B_j \subseteq U_{i_j}$, $j=1, \dots, n$, $i_j \in I$.

Quindi $\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} = X \Rightarrow \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ è un sottoricoprimento
 finito di $\mathcal{U} \Rightarrow X$ è compatto. \square

teorema Se X e Y sono compatti, allora
 $X \times Y$ è compatto.

NOTA: è anche vero che, se $\{X_i\}_{i \in I}$ sono spazi compatti, allora
 $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto (teorema di Tychonoff)

DIMOSTRAZIONE

Per il Lemma, verifico la compattezza per ricoprimenti di $X \times Y$
 della forma $\mathcal{U} = \{U_i \times V_i\}_{i \in I}$, dove $U_i \subseteq X$, $V_i \subseteq Y$ sono aperti

Fissato $x_0 \in X$, guardo $\pi_x^{-1}(x_0) \subseteq X \times Y$. Si è visto $\pi_x^{-1}(x_0) \cong Y$,

quindi è compatto. Gli aperti $U_i \times V_i$ t.c. $x_0 \in U_i$ coprono $\pi_x^{-1}(x_0)$

Per compattezza di Y , $\exists I_{x_0} \subseteq I$ finito t.c. $\pi_x^{-1}(x_0) \subseteq \bigcup_{i \in I_{x_0}} U_i \times V_i$

Pongo $U_{x_0} = \bigcap_{i \in I_{x_0}} U_i$: questo è aperto e contiene x_0
 la famiglia $\{U_{x_j}\}_{x_j \in X}$ è un ricoprimento aperto di X .

Per compattezza di X , $\exists x_1, \dots, x_n$ t.c. $X = \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$.

Per costruzione, $U_{x_0} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I_{x_0}} U_i \times V_i$

Segue $\{U_i \times V_i\}_{i \in \bigcup_{j=1}^n I_{x_j}}$ è un sottoricoprimento finito di \mathcal{U} :

$$X \times Y \supseteq \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i \in I_{x_j}} (U_i \times V_i) \supseteq \bigcup_{j=1}^n U_{x_j} \times Y = \left(\bigcup_{j=1}^n U_{x_j} \right) \times Y = X \times Y \quad \square$$

NOTA: è anche vero che la compattezza può essere controllata
 usando una prebase, ma la dimostrazione è più complicata
 (Teorema di Alexander)

corollario Se X_1, \dots, X_n sono spazi compatti,
 allora $\prod_{i=1}^n X_i$ è compatto

Teorema di Heine-Borel

I compatti di \mathbb{R}^n sono esattamente i sottoinsiemi chiusi e limitati.

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) $\mathbb{R}^n \in \mathbb{T}_2$, quindi un compatto è chiuso

Inoltre si è visto che in uno spazio metrico compatto la distanza è limitata. (la distanza su $X = \mathbb{R}^n$ è $d|_X$)

(\Leftarrow) Un sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n è contenuto in $[-R, R]^n = \mathbb{R}^n$ per R abbastanza grande (si usa la distanza del sup).

Per quanto appena visto, $[-R, R]^n$ è compatto, e un sottoinsieme di $[-R, R]^n$ chiuso in \mathbb{R}^n , è anche chiuso in $[-R, R]^n$.

Essendo chiuso di un compatto, è compatto. □

Teorema di Weierstrass

Se X è uno spazio topologico compatto e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f ammette massimo e minimo.

DIMOSTRAZIONE

$f(X) \subseteq \mathbb{R}$ è compatta, quindi chiusa e limitata.

Dunque $\sup f(x)$ e $\inf f(x)$ sono in \mathbb{R} , e il fatto che sia chiusa implica $\sup f(x), \inf f(x) \in f(X)$ ($\sup A, \inf A$ sono sempre

punti aderenti di A), quindi $\sup f(x) = \max f(x)$, $\inf f(x) = \min f(x)$ □

Corollario Tutte le norme su \mathbb{R}^n sono topologicamente equivalenti.

NOTA: in dimensione infinita è falso

DIMOSTRAZIONE

Sia $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una norma.

Mostro che è topologicamente eq. a quella euclidea.

Vediamo che $\|\cdot\|$ è continua per τ_e .

Se e_i è la base standard di \mathbb{R}^n ,

poniamo $M = \max \{ \|e_i\| \mid i=1, \dots, n \}$

Per gli assiomi di norma

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| = \left\| \sum (x_i - y_i) e_i \right\| \leq \sum |x_i - y_i| \|e_i\| \leq d_1(x, y) M$$

Quindi $\|\cdot\|$ è M -Lipschitz rispetto a d_1 , che induce la topologia euclidea, quindi è continua.

Restringiamoci a $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_e = 1\}$

Questo è chiuso e limitato, quindi è compatto.

Ora $\|\cdot\|_{|_{S^{n-1}}}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione continua,

quindi ha massimo e minimo: $\exists k, h \in \mathbb{R}^+ \neq c$.

$$k < \|v\| < h \quad \forall v \in S^{n-1}$$

Ora, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|_e} \in S^{n-1}$: $k \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_e} \right\| \leq h$

$$\text{cioè } k \|x\|_e \leq \|x\| \leq h \|x\|_e$$

Quindi le norme sono topologicamente equivalenti. □

compattificazione di Alexandrov

Sia X spazio topologico.

DEF. Una **compattificazione a un punto** di X è uno spazio \hat{X} con una funzione continua $i: X \rightarrow \hat{X}$ con le seguenti proprietà:

- (1) i sia un'immersione topologica.
- (2) $i(X)$ è denso in \hat{X}
- (3) $|\hat{X} \setminus i(X)| = 1$
- (4) \hat{X} è compatto

Vediamo una costruzione esplicita di una di queste.

DEF. Sia (X, τ_X) uno spazio topologico.

La sua **compattificazione di Alexandrov** è

lo spazio topologico dato da $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$

con la seguente topologia τ :

$A \in \hat{\tau}$ è aperto $\iff \omega \notin A$ e $i^{-1}(A) \in \tau_X$

oppure

$\omega \in A$ e $X \setminus i^{-1}(A)$ è un chiuso compatto di X

Vediamo che τ è effettivamente una topologia

• $\emptyset \in \tau$ chiaro dal fatto $\emptyset \in \tau_X$

$\hat{X} \in \tau$ perché $X \setminus i^{-1}(\hat{X}) = \emptyset$ è chiuso e compatto.

• $A_1, A_2 \in \tau$: ci sono tre casi

(i) $\omega \notin A_1 \cup A_2$: in questo caso $\omega \notin A_1, \omega \notin A_2$, quindi

$i^{-1}(A_1 \cap A_2) = i^{-1}(A_1) \cap i^{-1}(A_2)$ è aperto in X , dunque $A_1 \cap A_2 \in \tau$

(ii) $\omega \notin A_1, \omega \in A_2$: $i^{-1}(A_1) \in \tau_X$ e $X \setminus i^{-1}(A_2)$ è chiuso e compatto in X

$\implies \omega \notin A_1 \cap A_2$: $i^{-1}(A_1 \cap A_2) = i^{-1}(A_1) \cap i^{-1}(A_2)$ è aperto in X , dunque $A_1 \cap A_2 \in \tau$

(iii) $\omega \in A_1 \cap A_2$: $X \setminus i^{-1}(A_1), X \setminus i^{-1}(A_2)$ sono chiusi e compatti di X .

$X \setminus i^{-1}(A_1 \cap A_2) = (X \setminus i^{-1}(A_1)) \cup (X \setminus i^{-1}(A_2))$ è un chiuso compatto

Quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau$

• se $\{A_i\}_{i \in I}$ t.c. $A_i \in \tau$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

(i) se $\omega \notin A_i$, allora $i^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} i^{-1}(A_i)$ è aperto in X

(ii) se $\omega \in A_{i_0}$, allora $\omega \in \bigcup_{i \in I} A_i$, e $X \setminus i^{-1}(A_{i_0})$ è chiuso e compatto in X
e $i^{-1}(A_i) \in \tau_X$ per $i \in I \setminus \{i_0\}$

Segue $X \setminus i^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = X \setminus (\bigcup_{i \in I} i^{-1}(A_i)) = \bigcap_{i \in I} X \setminus i^{-1}(A_i) =$

$$= \underbrace{(X \setminus i^{-1}(A_{i_0}))}_{\text{chiuso compatto di } X} \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} i^{-1}(A_i)\right)}_{\text{chiuso di } X}$$

\implies chiuso del compatto $X \setminus i^{-1}(A_{i_0})$,
e quindi è compatto

Vediamo che \hat{X} è una **compattificazione a un punto** di X

teorema $i: X \rightarrow \hat{X}$ è un'immersione topologica.
 Inoltre, se X non è compatto, allora \hat{X} è una compattificazione
 a un punto di X .

DIMOSTRAZIONE

(1) i è un'immersione topologica.

Basta che dimostri che è continua e aperta.

È chiaramente aperta per definizione di τ e

se $A \subseteq \hat{X}$ è aperto, allora per definizione $i^{-1}(A)$ è un aperto di X .

(2) se $i(X)$ non fosse denso, allora $i(X) \subseteq \overline{i(X)} \neq \hat{X} = i(X) \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow i(X) = \overline{i(X)}$, quindi $i(X)$ è chiuso e $\{\infty\} = \hat{X} \setminus i(X)$ è aperto.

Per definizione della topologia, se $\{\infty\} \in \tau$,

allora $X \setminus i^{-1}(\{\infty\}) = X$ è un chiuso compatto di X

Se X non è compatto, è un assurdo.

(3) $|\hat{X} \setminus i(X)| = 1$ chiaro

(4) \hat{X} è compatto.

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di \hat{X}

Sia $i_0 \in I$ + c. $\infty \in U_{i_0}$. Per definizione, $X \setminus i^{-1}(U_{i_0})$

è un chiuso compatto di X .

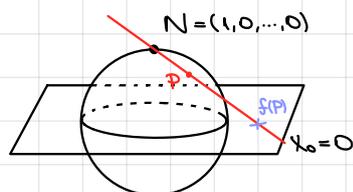
$\mathcal{U}' = \{i^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X .

Per compattezza di $X \setminus i^{-1}(U_{i_0}) \exists J \subseteq I$ finito + c. $X \setminus i^{-1}(U_{i_0}) \subseteq \bigcup_{i \in J} i^{-1}(U_i)$

Segue che $\{U_i\}_{i \in J} \cup \{U_{i_0}\}$ è un sottoricoprimento finito di \mathcal{U}

□

esempio vedremo che la compattificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n
 si può identificare con S^n tramite la proiezione stereografica.



teorema Sia $f: X \rightarrow Y$ continua, con X compatto e $Y T_2$.

Allora f è chiusa.

In particolare, se f è bigettiva, è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE

Sia $C \subseteq X$ chiuso. Essendo chiuso in un compatto, C è compatto.

Dunque $f(C)$ è un compatto, ma un compatto in un T_2 è chiuso. \square

Il teorema è utile nelle applicazioni, per mostrare che una f continua è un omeomorfismo, senza analizzare la continuità di f^{-1} .

**teorema: unicità della
compattificazione di
Alexandrov**

Siano Y uno spazio topologico e Z uno spazio topologico compatto e T_2 tale che $\exists p \in Z$ con $Z \setminus \{p\} \cong Y$.

Allora $Z \cong \hat{Y}$ (compattificazione di Alexandrov)

In particolare, l'unica compactificazione ad un punto di Y che sia T_2 è la compactificazione di Alexandrov.

DIMOSTRAZIONE

Sia $f: Y \rightarrow Z \setminus \{p\}$ un omeomorfismo, e definiamo

$g: \hat{Y} \rightarrow Z$ ponendo $g(y) = f(y) \forall y \in Y$ e $g(\infty) = p$.

Vediamo che g è continua.

Sia $A \subseteq Z$ aperto

Se $p \in A$, sia $C = Z \setminus A$, chiuso del compatto Z , quindi compatto, e poiché $p \in A$, $C \subseteq f(Y)$, dunque, essendo $f^{-1}: Z \setminus \{p\} \rightarrow Y$ omeomorfismo, $f^{-1}(C)$ è un compatto chiuso di Y .

Perciò, per definizione di compactificazione di Alexandrov,

$\hat{Y} \setminus f^{-1}(C)$ è un aperto di \hat{Y} . Ma $g^{-1}(A) = g^{-1}(Z \setminus C) = \hat{Y} \setminus f^{-1}(C)$

per cui $g^{-1}(A)$ è aperto in \hat{Y} .

Se invece $p \notin A$, allora $A \subseteq Z \setminus \{p\}$ ed è aperto in $Z \setminus \{p\}$, per cui

$g^{-1}(A) = f^{-1}(A)$ è aperto in $Y \cong \hat{Y}$ e quindi aperto in \hat{Y} .

Dunque g è continua.

g è chiusa in quanto \hat{Y} è compatto e Z è T_2 .

È chiaramente bigettiva, per cui è un omeomorfismo \square

ATTENZIONE: è facile compactificare ad un punto perdendo la condizione T_2 .

Dato Y , su $Y \cup \{\infty\}$ si può mettere la topologia i cui aperti sono gli aperti di Y e tutto $Y \cup \{\infty\}$

(Questo spazio è compatto e contiene una copia omeomorfa di Y)

Proiezione stereografica

Sia $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \text{ t.c. } \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

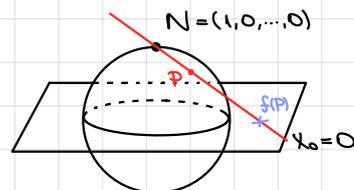
e sia $N = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$

Allora $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ tramite la proiezione stereografica

$f: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è definita così:

$f(P)$ è il punto di intersezione tra la retta che congiunge

N e P e l'ipospazio $\{0\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$



Se $P = (x_0, \dots, x_n)$, la retta per N e P è parametrizzata da:

$$t \mapsto tP + (1-t)N = (tx_0, \dots, tx_n) + (1-t, 0, \dots, 0) = (tx_0 + 1 - t, tx_1, \dots, tx_n)$$

Questa retta passa per $\{x_0 = 0\}$ quando $tx_0 + 1 - t = 0$, cioè

$$t = \frac{1}{1-x_0} \quad (\text{tutto bene perché, essendo } P \neq N, x_0 < 1, \text{ in particolare } 1-x_0 \neq 0)$$

Sostituendo:

$$f(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1-x_0}, \frac{x_2}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0} \right)$$

Dunque f è chiaramente ben definita e continua.

Per vedere che è un omeomorfismo, costruiamo esplicitamente un'inversa

Ora $g: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$ è tale che

$g(P)$ sia l'intersezione diversa da N tra

la retta per P ed N e la sfera S^n

Se $P = (x_1, \dots, x_n)$, visto come punto di \mathbb{R}^n ,

P ha coordinate $(0, x_1, \dots, x_n)$, e la retta che ci interessa

è parametrizzata da

$$t \mapsto t(0, x_1, \dots, x_n) + (1-t)(1, 0, \dots, 0) = (1-t, tx_1, \dots, tx_n)$$

Tale punto giace su $S^n \iff (1-t)^2 + \sum_{i=1}^n (tx_i)^2 = 1$

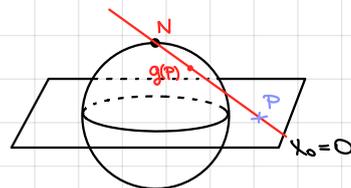
$$\iff t^2(1 + \|x\|^2) - 2t = 0 \iff t = 0 \vee t = \frac{2}{1 + \|x\|^2}$$

Per $t = 0$, otteniamo N .

$$\text{Dunque } g(x_1, \dots, x_n) = \left(1 - \frac{2}{1 + \|x\|^2}, \frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \|x\|^2} \right) = \left(\frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1}, \frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \|x\|^2} \right)$$

È evidente che g è continua, e chiaramente

f e g sono una l'inversa dell'altra.



corollario La compattificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n è S^n .

DIMOSTRAZIONE

Abbiamo visto che $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$

Inoltre S^n è compatto e T_2 , da cui la tesi per unicità

della compattificazione di Alexandrov. \square

compattezza per successioni

def. Uno spazio topologico X è **compatto per successioni** (o sequenzialmente compatto) se ogni successione a valori in X ammette una sottosuccessione convergente.

teorema Sia X I -numerabile.
Se X è compatto, allora è compatto per successioni

DIMOSTRAZIONE

Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione

Pongo $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = \{x_i \mid i \geq n\}$

sia $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D_n}$. Poiché $\overline{D_{n+1}} \subseteq \overline{D_n}$ (poiché $D_{n+1} \subseteq D_n$)
e $D_n \neq \emptyset \forall n$, essendo X compatto, $\Omega \neq \emptyset$

Sia $P \in \Omega$: costruiamo una sottosuccessione di x_n che tende a P .

Poiché X è I -numerabile, \exists sfi $U_k, k \in \mathbb{N}$, di P , con $U_{k+1} \subseteq U_k \forall k$

Poiché U_0 è un intorno di P e $P \in \overline{D_0}$, si ha $U_0 \cap D_0 \neq \emptyset$,

cioè $\exists n_0$ t.c. $x_{n_0} \in U_0$

Poiché U_1 è un intorno di P e $P \in \overline{D_{n_0+1}}$, si ha $U_1 \cap D_{n_0+1} \neq \emptyset$,

cioè $\exists n_1 \geq n_0+1$ t.c. $x_{n_1} \in U_1$

Procedendo per ricorrenza, si costruisce una sottosuccessione x_{n_k}
con $x_{n_k} \in U_k \forall k \in \mathbb{N}$.

Mostriamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = P$:

sia U un intorno qualsiasi di P . Per definizione di sfi,

$\exists h \in \mathbb{N}$ t.c. $U_h \subseteq U$ ma allora $\forall k > h$ si ha $x_{n_k} \in U_k \subseteq U_h \subseteq U$. \square

def. Uno spazio X si dice **di Lindelöf** se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento al più numerabile

Lemma Sia X a base numerabile
Allora ogni ricoprimento aperto di X
ammette un sottoricoprimento numerabile.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ un ricoprimento aperto di X .

$\forall x \in X \exists i_x \in I$ con $x \in U_{i_x}$ e, se \mathcal{B} è una fissata base numerabile di X ,

per definizione, $\exists B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subseteq U_{i_x}$

l'insieme $\{B_x, x \in X\} \subseteq \mathcal{B}$ è numerabile,

diciamo $\{B_x, x \in X\} = \{B_{x_n}, n \in \mathbb{N}\}$

Ma allora $X = \bigcup_{x \in X} B_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{x_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{i_{x_n}}$

Donque $\{U_{i_{x_n}}\}$ è il sottoricoprimento numerabile di \mathcal{U} cercato \square

teorema Sia X II-numerabile.

Allora X è compatto $\Leftrightarrow X$ è compatto per successioni

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) Chiaro, poiché II num \Rightarrow I num

(\Leftarrow) Dimostriamo che non compatto \Rightarrow non compatto per successioni

Sia \mathcal{U} un ricoprimento di X che non ammette ricoprimenti finiti.

Per il lemma, posso supporre \mathcal{U} numerabile, per cui $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \dots\}$

Definisco una successione x_n in X :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in X \setminus (U_0 \cup \dots \cup U_{n-1})$$

$\neq \emptyset$ perché altrimenti avrei un ricoprimento finito

Supponiamo per assurdo che esista una sottosuccessione x_{n_k} che tende a $P \in X$.

Poiché \mathcal{U} è un ricoprimento, $P \in U_j$, $j \in \mathbb{N}$. Poiché U_j è aperto è intorno di P

e se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = P$, allora $x_{n_k} \in U_j \quad \forall k > k_0$

Ma $n_k > j$ definitivamente, per cui $x_{n_k} \in X \setminus (U_0 \cup \dots \cup U_{n_k-1}) \subseteq X \setminus U_j$

per cui in particolare $x_{n_k} \notin U_j$ se $n_k > j$ \downarrow

□

corollario Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Allora A è compatto $\Leftrightarrow A$ è compatto per successioni

compattezza in spazi metrici

DEF. (X, d) metrico. X si dice

(1) **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge

(x_n è di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ se $n, m \geq n_0$)

(2) **totalmente limitato** se $\forall \varepsilon > 0$ X ammette un ricoprimento finito di palle di raggio ε

(3) **limitato** se $\exists k \in \mathbb{R} \quad d(x, y) \leq k \quad \forall x, y \in X$

FATTI: (1) ogni successione convergente è di Cauchy
ma il viceversa è falso

(2) totalmente limitato \Rightarrow limitato

Fisso $\varepsilon = 1$, trovo un ricoprimento finito $B(x_1, \varepsilon), \dots, B(x_n, \varepsilon)$

Se $k = 2\varepsilon + \max\{d(x_i, x_j) \mid i, j = 1, \dots, n\}$, allora dati $x, y \in X$

$\exists i$ t.c. $x \in B(x_i, \varepsilon)$, $\exists j$ t.c. $y \in B(x_j, \varepsilon)$ e

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) < \varepsilon + \max\{d(x_i, x_j)\} + \varepsilon = k$$

Il viceversa è falso.

Se X è infinito con la distanza discreta, allora

X è limitato ma le palle di raggio $1/2$ sono

singoletti, e dunque un loro numero finito non può ricoprire X .

teorema Sia X uno spazio metrico.
 Allora sono fatti equivalenti:
 (1) X compatto
 (2) X compatto per successioni
 (3) X compatto e totalmente limitato

Oss Le condizioni (1) e (2) sono topologiche, mentre a priori la (3) è metrica.

numero di Lebesgue

def. Sia $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ un ricoprimento di uno spazio metrico X .
 \mathcal{U} ammette numero di Lebesgue $\varepsilon > 0$ se
 $\forall x \in X \exists i \in I : B(x, \varepsilon) \subseteq U_i$

teorema Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di uno spazio metrico compatto X .
 Allora \mathcal{U} ammette un numero di Lebesgue

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo, supponiamo che $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X$ t.c. $B(x_n, 2^{-n}) \not\subseteq U_i \forall i \in I$

Poiché X è compatto per successioni, $\exists x_{n_k}$ sotto successione t.c.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x}$$

Poiché \mathcal{U} è un ricoprimento, $\exists i_0 \in I$ t.c. $\bar{x} \in U_{i_0}$, e poiché

U_{i_0} è aperto, $\exists r > 0$ t.c. $B(\bar{x}, r) \subseteq U_{i_0}$

Poiché $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, $\exists k_0$ t.c. $x_{n_k} \in B(\bar{x}, \frac{r}{2}) \forall k \geq k_0$

D'altronde $2^{-n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, quindi $\exists k_1$ t.c. $2^{-n_k} < \frac{r}{2} \forall k \geq k_1$

Ma allora, se $K = \max\{k_0, k_1\}$, ho

$x_{n_K} \in B(\bar{x}, \frac{r}{2})$ e $2^{-n_K} < \frac{r}{2}$, perciò

$\forall y \in B(x_{n_K}, 2^{-n_K})$ ho $d(\bar{x}, y) \leq d(\bar{x}, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

dunque $B(x_{n_K}, 2^{-n_K}) \subseteq B(\bar{x}, r) \subseteq U_{i_0}$ \downarrow

□

esempio

Se $X = (1, +\infty)$ con la metrica euclidea

e $\mathcal{U} = \{(x - \frac{1}{x}, x + \frac{1}{x}) \cap (1, +\infty), x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che non ammette numero di Lebesgue.

dato $\varepsilon > 0$, $\exists x$ sufficientemente grande t.c.

$B(x, \varepsilon) \not\subseteq (y - \frac{1}{y}, y + \frac{1}{y})$ per alcun $y \in (1, +\infty)$

uniforme continuità

Sia $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una funzione.

Ricordiamo che f è continua in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

È implicito che δ dipenda, oltre da ε , anche da x_0 .

Se δ dipende solo da ε e non da x_0 , f si dice uniformemente continua.

DEF. Una funzione $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ si dice **uniformemente continua** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X \ f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

o, equivalentemente,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

esempio (1) Una funzione Lipschitziana è uniformemente continua

$$\exists k > 0 : d'(f(x_1), f(x_2)) \leq k d(x_1, x_2)$$

per cui dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua

$$\text{Dato } \varepsilon = 1, \text{ abbiamo che, } n \in \mathbb{N}, \delta > 0, d(f(n), f(n+\delta)) = |n^2 - (n+\delta)^2| = |2n\delta + \delta^2|$$

$$= 2n\delta + \delta^2 > 2n\delta, \text{ per cui, se } n > \frac{1}{\delta}, d(f(n), f(n+\delta)) > 2 > \varepsilon$$

Cioè dato $\varepsilon = 1$, $\forall \delta > 0$ ho trovato un punto del dominio n , con $n > \frac{1}{\delta}$, per cui $d(f(n), f(n+\delta)) > \varepsilon$

teorema di Heine-Cantor

$(X, d), (Y, d')$ metriche, $f: X \rightarrow Y$ continua.

Se X è compatto, f è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo, supponiamo che

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall \delta > 0 \exists x, x' \in X \text{ con } d(x, x') < \delta \text{ ma } d'(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$$

Scesto $\delta = 2^{-n}$, vuol dire che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\exists x_n, x'_n \text{ con } d(x_n, x'_n) < 2^{-n} \text{ ma } d'(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$$

Per compattezza, posso estrarre una sottosuccessione x_{n_k} di x_n

tale che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$. Per continuità di f in \bar{x} ,

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(B(\bar{x}, \delta)) \subseteq B(f(\bar{x}), \frac{\varepsilon}{2})$$

Ora, poiché $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ e $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) \rightarrow 0$,

anche $x'_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, per cui $\exists k_0$ t.c.

$$x_{n_{k_0}} \in B(\bar{x}, \delta) \text{ e } x'_{n_{k_0}} \in B(\bar{x}, \delta)$$

Ma allora $d'(f(x_{n_{k_0}}), f(x'_{n_{k_0}})) \leq d'(f(x_{n_{k_0}}), f(\bar{x})) + d'(f(\bar{x}), f(x'_{n_{k_0}})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \zeta \quad \square$

Funzioni proprie

def. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ continua si dice **propria** se $f^{-1}(K) \subseteq X$ è compatto $\forall K \subseteq Y$ compatto

Ricordiamo che una funzione continua da un compatto a un T_2 è chiusa. Le funzioni proprie cercano di recuperare un risultato analogo quando X non è compatto. Sono pertanto utilissime per capire se f è un'identificazione e studiare i quozienti.

proposizione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è propria \iff porta successioni divergenti in successioni divergenti

DIMOSTRAZIONE

(\implies) Per assurdo, $\exists x_n$ t.c. $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ ma $\|f(x_n)\| \not\rightarrow +\infty$

A meno di estrarre una sottosuccessione, posso supporre

$\|x_n\| \rightarrow +\infty$ ma $\exists R > 0$ t.c. $\|f(x_n)\| < R \forall n$

La palla chiusa $\overline{B(0, R)}$ è compatta, ma $f^{-1}(\overline{B(0, R)}) \ni \{x_n\}$

perciò $f^{-1}(\overline{B(0, R)})$ è illimitato e non può essere compatto. \downarrow

(\impliedby) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto. Se per assurdo $f^{-1}(K)$ non fosse compatto,

sarebbe illimitato (è chiuso in quanto preimmagine di un chiuso)

Ma allora $f^{-1}(K)$ contiene una successione divergente, la cui immagine

però è contenuta in K , e perciò non è divergente \square

proposizione Sia $f: X \rightarrow Y$ propria con Y localmente compatto e T_2 . Allora f è chiusa.

DIMOSTRAZIONE

Sia $C \subseteq X$ un chiuso, mostriamo che $Y \setminus f(C)$ è aperto.

Sia $y_0 \in Y \setminus f(C)$ e sia W un intorno compatto di y_0 .

Poiché f è propria, $f^{-1}(W)$ è compatto.

Ora $C \cap f^{-1}(W)$ è chiuso in $f^{-1}(W)$, dunque è compatto

(chiuso in un compatto è compatto). Dunque $f(C \cap f^{-1}(W))$ è

compatto (immagine di compatto è compatta), dunque chiuso

perché Y è T_2 . Ora $f(C \cap f^{-1}(W)) = f(C) \cap W$, per cui

$f(C) \cap W$ è chiuso in Y .

Dunque $W \setminus f(C)$ è aperto in W e per costruzione $y_0 \in W \setminus f(C)$.

Poiché W è un intorno di y_0 e $W \setminus f(C)$ è aperto in W , anche

$W \setminus f(C)$ è un intorno di y_0 . Tale intorno è tutto contenuto in

$Y \setminus f(C)$, che è perciò intorno di ogni suo punto, ed è perciò aperto. \square

Topologia quoziente

DEF. Sia X uno spazio topologico e sia \sim una relazione di equivalenza su X .
La topologia quoziente su X/\sim è così definita:

se $\pi: X \rightarrow X/\sim$ è la proiezione,
 $A \subseteq X/\sim$ è aperto $\iff \pi^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto

Controlliamo che sia davvero una topologia:

(1) Poiché $\emptyset = \pi^{-1}(\emptyset)$ è aperto in X , \emptyset è aperto in X/\sim

Poiché $X = \pi^{-1}(X/\sim)$ è aperto in X , X/\sim è aperto in X/\sim

(2) Se $A_i, i \in I$ sono aperti di X/\sim , allora

$\pi^{-1}(A_i)$ è aperto in $X \ \forall i \in I$, perciò $\pi^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(A_i)$

è aperta in quanto unione di aperti, quindi $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto in X/\sim .

(3) Se A_1, A_2 sono aperti di X/\sim , allora

$\pi^{-1}(A_1 \cap A_2) = \pi^{-1}(A_1) \cap \pi^{-1}(A_2)$ è aperto in X ,

quindi $A_1 \cap A_2$ è aperto in X/\sim .

proposizione la topologia quoziente è la topologia più fine che rende $\pi: X \rightarrow X/\sim$ continua.

DIMOSTRAZIONE

(1) È ovvio che se X/\sim ha la topologia quoziente, π è continua.

(2) Sia τ una topologia che rende π continua.

Allora $\forall A \subseteq X/\sim$ aperto per τ , $\pi^{-1}(A)$ deve essere aperto in X ,
per cui A deve appartenere alla topologia quoziente.

Dunque τ è meno fine della topologia quoziente

teorema: proprietà universale della topologia quoziente

Siano X, Y spazi topologici e sia $f: X \rightarrow Y$

e sia \sim una relazione di equivalenza compatibile con f
(se $x_1 \sim x_2$, allora $f(x_1) = f(x_2)$), allora

f induce una mappa $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$, $\bar{f}([x]) = f(x)$

Allora si ha che \bar{f} è continua $\iff f$ è continua.

DIMOSTRAZIONE

Notiamo che $f = \bar{f} \circ \pi$. Ora f è continua \iff

$\forall A \subseteq Y$ aperto, $f^{-1}(A)$ è aperto in $X \iff \forall A \subseteq Y$ aperto, $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A))$ è aperto in X

$\iff \forall A \subseteq Y$ aperto, $\bar{f}^{-1}(A)$ è aperto in $X/\sim \iff \bar{f}$ è continua. \square

Si chiama "proprietà universale" perché caratterizza la topologia quoziente tra tutte le topologie su X/\sim .

Come si studiano i quozienti?

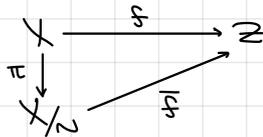
Gravè, come si dimostra $X/N \cong Z$ con Z già noto?

Di norma, si procede così:

(1) Si indovina Z

(2) si definisce $f: X \rightarrow Z$ continua compatibile con N ,
cioè che passi al quoziente definendo $\bar{f}: X/N \rightarrow Z$.

Tale \bar{f} sarà continua per la proprietà universale.



(3) Se voglio \bar{f} omeomorfismo, devo controllare che:

• \bar{f} sia surgettiva, che equivale a f surgettiva

• \bar{f} sia iniettiva, cioè $x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$

(\implies) serve perché sia ben definita.)

(4) Ora \bar{f} è continua e bigettiva.

Non esistono metodi standard per garantire che \bar{f}^{-1} sia continua.

(Si prova a cercare di fare saltare meccanismi tipo mappe da compatto a T_2 ,...)

proposizione X compatto/connesso $\implies X/N$ compatto/connesso

DIMOSTRAZIONE

Segue dal fatto che $\pi: X \rightarrow X/N$ è continua e surgettiva. \square

esempio Sia $A \subseteq X$. Definiamo la relazione di equivalenza su X :

$$x \sim y \iff x = y \vee \{x, y\} \in A$$

Il quoziente X/N si denota anche X/A e si chiama spazio ottenuto da X collassando A ad un punto.

esempio $X = [0, 1]$, $A = \{0, 1\}$



$X/A \cong S^1$: cerco $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ continua e surgettiva
t.c. $f(x) = f(y) \iff x = y \vee \{x, y\} = \{0, 1\}$

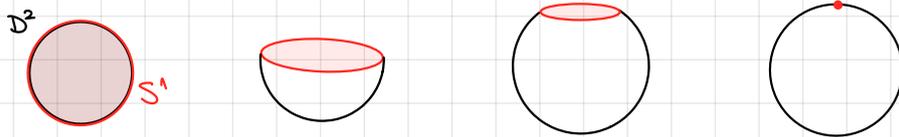
Prendo $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

Questa induce $\bar{f}: [0, 1] / \{0, 1\} \rightarrow S^1$ continua e bigettiva

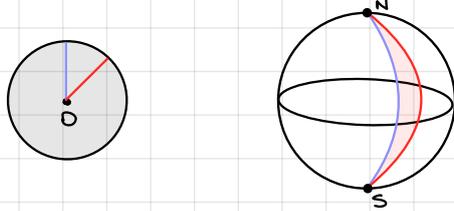
Perché $[0, 1]$ è compatto, $[0, 1] / \{0, 1\}$ è compatto;

inoltre S^1 è T_2 , per cui \bar{f} è chiusa ed è perciò un omeomorfismo.

esempio $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ (generalizzazione al caso $n \geq 2$ dell'esempio precedente)



Cerco $f: D^n \rightarrow S^n$ t.c. $f(x) = f(y) \iff x=y \vee \|x\| = \|y\| = 1$



f manda ogni raggio in un meridiano, in modo che 0 vada in S e tutto $S^{n-1} = \partial D^n$ vada in N .

Se ci fidiamo che una tale f continua esista, tale f indurrà $\bar{f}: D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$ continua e bigettiva, che sarà un omeomorfismo in quanto D^n/S^{n-1} è compatto (lo è D^n) e S^n è T_2 .

Come si può scrivere f ? Voglio

$$f(v) = (\lambda v, g(\|v\|)) \text{ con } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

\downarrow \downarrow
 proiezione altezza
 su $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\text{e } g(0) = -1 \text{ (} 0 \text{ va in } S), g(1) = 1 \text{ (} \partial D^n \text{ va in } N)$$

Può funzionare $g(\|v\|) = 2\|v\| - 1$, però conviene

(per vari motivi computazionali) scegliere $g(\|v\|) = 2\|v\|^2 - 1$

Dunque $f(v) = (\lambda v, 2\|v\|^2 - 1)$ e calcolo λ in modo che $\|f(v)\| = 1$

$$\text{Si trova } \|\lambda v\|^2 + (2\|v\|^2 - 1)^2 = 1 \iff \lambda^2 \|v\|^2 + 4\|v\|^4 + 1 - 4\|v\|^2 = 1$$

$$\iff \|v\|^2 (4\|v\|^2 + (\lambda^2 - 4)) = 0 \xrightarrow{\|v\| > 0} 4 - \lambda^2 = 4\|v\|^2 \implies \lambda^2 = 4(1 - \|v\|^2)$$

Per motivi geometrici, scelgo $\lambda > 0$: $\lambda = 2\sqrt{1 - \|v\|^2}$

$$f(v) = (2\sqrt{1 - \|v\|^2} v, 2\|v\|^2 - 1)$$

esempio \mathbb{R}/\mathbb{Q} non è T_1 , ma non ha topologia indiscreta

Infatti, se $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, abbiamo $\pi^{-1}([\mathbb{Q}]) = \mathbb{Q}$ non è chiuso,

per cui, per definizione di topologia quoziente, $[\mathbb{Q}] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

non è chiuso e \mathbb{R}/\mathbb{Q} non è T_1 .

D'altronde, \mathbb{R}/\mathbb{Q} non ha topologia indiscreta perché

ad esempio $[\mathbb{Z}]$ è chiuso in \mathbb{R}/\mathbb{Q}

Oss $C \subseteq X/N$ è chiuso $\iff \pi^{-1}(C) \subseteq X$ è chiuso

Identificazioni

Ricordiamo che, data $f: X \rightarrow Y$ continua, che induce $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ continua e bigettiva, rimane aperto il problema di capire se \bar{f} è un omeomorfismo.

Questo capita se e solo se f è un'identificazione

DEF. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è una **identificazione** se

- (1) f è surgettiva
- (2) $A \subseteq Y$ è aperto $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto
(l'implicazione (\implies) equivale alla continuità di f)

Notiamo che (2) è equivalente a

(2') $C \subseteq Y$ è chiuso $\iff f^{-1}(C) \subseteq X$ è chiuso

teorema Sia $f: X \rightarrow Y$ identificazione
Sia \sim la relazione su X indotta da f ,
cioè $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$
Allora f induce un omeomorfismo
 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$

DIMOSTRAZIONE

Poiché f è surgettiva e $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$,

la mappa \bar{f} è ben definita e bigettiva.

Inoltre, se $\pi: X \rightarrow X/\sim$, poiché f è un'identificazione,

$A \subseteq Y$ è aperto $\iff f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto

$\iff \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A)) \subseteq X$ è aperto $\iff \bar{f}^{-1}(A) \subseteq X/\sim$ è aperto \square

teorema $f: X \rightarrow Y$ continua e surgettiva. Allora

- (1) se f è aperta, f è un'identificazione
- (2) se f è chiusa, f è un'identificazione

DIMOSTRAZIONE

(1) Devo solo vedere che, se $A \subseteq Y$ è tale che $f^{-1}(A)$ è aperto, allora A è aperto.

Ma, essendo f surgettiva, $A = f(f^{-1}(A))$, per cui A è aperto, essendo f aperta.

(2) Analogamente con i chiusi. \square

esempio Un'identificazione né aperta né chiusa

$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{0, +\infty\} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2, \quad Y = \mathbb{R}$$

$$f: X \rightarrow Y, \quad f(x, y) = x$$

Sia $A = Y = \mathbb{R}$ t.c. $f^{-1}(A)$ sia aperto. Voglio vedere che A è aperto
(il fatto che f sia continua e surgettiva è ovvio)

Sia $x_0 \in A$. Allora $(x_0, 0) \in f^{-1}(A)$

Essendo $f^{-1}(A)$ aperto, $\exists U$ intorno di $(x_0, 0)$ in X con $U \subseteq f^{-1}(A)$

Analizzando i tre casi $x_0 < 0$, $x_0 = 0$, $x_0 > 0$, si vede che, in ogni caso, $f(U) \subseteq A$ è un intorno di x_0 in \mathbb{R} , per cui A è aperto



Dunque f è un'identificazione.

Vediamo che f non è aperta: se $U = B((0, 0), 1) \cap X$, allora U è aperto in X ma $f(U) = [0, 1)$ non è aperto in \mathbb{R}

Infine f non è chiusa perché $C = \{(x, y) : xy = 1 \text{ e } x > 0\}$ è un chiuso di X t.c. $f(C) = (0, +\infty)$ non è chiuso in \mathbb{R} .



Unione disgiunta e bouquet

DEF. Siano X e Y due spazi topologici.
La topologia unione disgiunta su $X \sqcup Y$ è la topologia per cui
 $A \subseteq X \sqcup Y$ è aperto $\iff A \cap X$ e $A \cap Y$ sono aperti

proposizione Le immersioni $i: X \rightarrow X \sqcup Y$ e $j: Y \rightarrow X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche aperte e chiuse

DIMOSTRAZIONE

Le immersioni sono chiaramente continue (per la definizione della topologia) e iniettive

Basta mostrare che i e j sono aperte e chiuse

Infatti, se $A \subseteq X$ è aperto, allora $i(A) \cap X = A \subseteq X$ aperto

e $i(A) \cap Y = \emptyset \subseteq Y$ aperto (perché l'unione è disgiunta)

Analogo per i chiusi e per j . \square

Oss Se C è una cc di $X \sqcup Y$, allora o C è una cc di X o C è una cc di Y
Infatti, se per assurdo, $C \cap X \neq \emptyset$, $C \cap Y \neq \emptyset$, allora possiamo scrivere
 $C = (C \cap X) \cup (C \cap Y)$ che sono due aperti disgiunti \downarrow

Oss Se X e Y sono entrambi non vuoti, allora $X \sqcup Y$ è sconnesso.
Infatti $X \sqcup Y$ è unione di due aperti non vuoti disgiunti.

proposizione $X \sqcup Y$ è compatto $\iff X$ e Y sono compatti

DIMOSTRAZIONE

(\implies) Se X e Y sono compatti, allora per continuità $i(X)$ e $j(Y)$ sono compatti e quindi $X \sqcup Y = i(X) \cup j(Y)$ è compatto.

(\impliedby) Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $X \sqcup Y$

Ora in particolare $\{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X ,
e poiché X è compatto, $\exists I_1$ finito t.c. $X = \bigcup_{i \in I_1} U_i$

Analogamente $\exists I_2$ finito t.c. $Y = \bigcup_{i \in I_2} U_i$

Quindi $\{U_i\}_{i \in I_1 \cup I_2}$ è un sottoricoprimento finito di $X \sqcup Y$
 $\implies X \sqcup Y$ è compatto. \square

DEF Siano X e Y spazi topologici e $x_0 \in X, y_0 \in Y$.

Il bouquet di (X, x_0) e (Y, y_0) è

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \cup Y / \{x_0, y_0\}$$

In generale il risultato dipende dalla scelta di x_0 e y_0 :

ad esempio, se $X=Y=[0,1]$ e $x_0=y_0=0$



se invece scegliamo $x_0=y_0=1/2$



e inoltre $\perp \not\cong [0,1]$ perché il secondo ha un punto che lo sconnette in 4 parti mentre ciascun punto del secondo lo sconnette in al più 2 parti.

proposizione Le mappe $i: X \rightarrow X \vee Y$ e $j: Y \rightarrow X \vee Y$ indotte dalle inclusioni di X, Y in $X \cup Y$ sono immersioni topologiche.

DIMOSTRAZIONE

Le mappe i, j sono continue perché composizione di continue e iniettive ($\pi: X \cup Y \rightarrow X \vee Y$ è iniettiva eccetto in x_0 e y_0 , ma X contiene solo x_0 e Y solo y_0).

Mostriamo che i è aperta (analogo per j)

sia $A \subseteq X$ aperto.

Se $x_0 \notin A$, allora $\pi^{-1}(i(A) \cap X) = A$ e $\pi^{-1}(i(A) \cap Y) = \emptyset$, quindi $\pi^{-1}(i(A))$ è aperto in $X \cup Y$ e quindi $i(A)$ è aperto in $X \vee Y$

Se $x_0 \in A$, allora $\pi^{-1}(i(A) \cap X) = A$ e $\pi^{-1}(i(A) \cap Y) = \{y_0\}$

sia $U = i(A) \cup i(Y)$

Ora $i(X) \cap U = i(X) \cap (i(A) \cup i(Y)) = (i(X) \cap i(A)) \cup (i(X) \cap i(Y)) = i(A) \cup \{x_0\} = i(A)$

e inoltre $\pi^{-1}(U) \cap X = A$ e $\pi^{-1}(U) \cap Y = Y \Rightarrow \pi^{-1}(U)$ è aperto in $X \cup Y$

e quindi U è aperto in $X \vee Y$

Dunque $i(A) = i(X) \cap U$ è aperto in $i(X)$. □

proposizione Se X e Y sono T_1 allora $X \vee Y$ è T_1 e le mappe $i: X \rightarrow X \vee Y, j: Y \rightarrow X \vee Y$ sono chiuse.

DIMOSTRAZIONE

$X \vee Y$ è T_1 : infatti $\pi^{-1}(\{p\})$ o è un singolo punto di $X \cup Y$ o $\{x_0, y_0\} = X \cup Y$.

In entrambi i casi, poiché X e Y sono T_1 , $\pi^{-1}(\{p\})$ è chiuso e dunque $\{p\}$ lo è.

Analogo alla dimostrazione precedente. Infatti, dato $A \subseteq X \vee Y$ chiuso,

si ottiene (ad esempio per i , cioè se $Y \in T_1$) che

$\pi^{-1}(i(A)) = A$ (se $x_0 \notin A$) o $\pi^{-1}(i(A)) = A \cup \{y_0\}$ (se $x_0 \in A$) e

se A è chiuso in X , tali insiemi sono chiusi in $X \cup Y$ perché $\{y_0\}$ è chiuso in Y . □

proposizione $X \vee Y$ è connesso $\Leftrightarrow X$ e Y sono connessi

DIMOSTRAZIONE

(\Leftarrow) Poiché X e Y sono connessi, anche $i(X)$ e $j(Y)$ lo sono.

Quindi $X \vee Y = i(X) \cup j(Y)$ è connesso in quanto

unione di connessi con intersezione non vuota: $i(X) \cap j(Y) = \{[x_0]\}$

(\Rightarrow) Se X fosse sconnesso, avremmo $X = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti non vuoti, wlog $x_0 \in B$: osserveremo che $i(A)$ e $i(B) \cup j(Y)$ sono aperti saturi disgiunti non vuoti di $X \vee Y$ (infatti i è immersione topologica in $i(X)$ aperto, quindi è una mappa aperta)

Questi si proiettano ad aperti disgiunti non vuoti di $X \vee Y$ \Leftarrow

□

proposizione $X \vee Y$ è compatto $\Leftrightarrow X$ e Y sono compatti

DIMOSTRAZIONE

(\Leftarrow) $i(X)$ e $j(Y)$ sono compatti, quindi $X \vee Y$ è compatto in quanto unione finita di compatti

(\Rightarrow) Poiché $X \cong i(X)$, basta vedere che $i(X)$ è compatto.

Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $i(X)$.

$\forall i \in I$ pongo $W_i = U_i$ se $[x_0] \notin U_i$, $W_i = U_i \cup j(Y)$ se $[x_0] \in U_i$

Così facendo, ogni W_i è aperto in $X \vee Y$ e $\{W_i\}$ è un ricoprimento di $X \vee Y$,

dunque $\exists I_0 \subseteq I$ finito t.c. $X \vee Y = \bigcup_{i \in I_0} W_i$ e dunque $i(X) = \bigcup_{i \in I_0} U_i$. □

proposizione Se X e Y sono normali, $X \vee Y$ è normale.

DIMOSTRAZIONE

Poiché X e Y sono T_1 , $X \vee Y$ è T_1 .

Siano $C_1, C_2 \subseteq X \vee Y$ chiusi.

- $[x_0] \notin C_1, [x_0] \notin C_2$: allora $\pi^{-1}(C_1), \pi^{-1}(C_2)$ sono chiusi di $X \sqcup Y$, e per definizione di topologia unione disgiunta, $C_1^X = \pi^{-1}(C_1) \cap X, C_2^X = \pi^{-1}(C_2) \cap X$ sono chiusi di X e $C_1^Y = \pi^{-1}(C_1) \cap Y, C_2^Y = \pi^{-1}(C_2) \cap Y$ sono chiusi di Y

Inoltre $C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow C_1^X \cap C_2^X = \emptyset$, da cui, essendo $X T_4$, $\exists U_1^X, U_2^X$ aperti disgiunti t.c. $C_1^X \subseteq U_1^X, C_2^X \subseteq U_2^X$. Inoltre, poiché $x_0 \notin C_1^X, x_0 \notin C_2^X$, possiamo sostituire a U_i^X con $U_i^X \setminus \{x_0\}$ (aperto perché $\{x_0\}$ è chiuso, dato che X è T_1), ottenendoci due aperti saturi che contengono C_1^X e C_2^X .

Analogamente trovo due aperti disgiunti $U_1^Y, U_2^Y \subseteq Y$ t.c. $C_1^Y \subseteq U_1^Y, C_2^Y \subseteq U_2^Y$ e $y_0 \notin U_1^Y, y_0 \notin U_2^Y$.

Ora $W_1 = \pi(U_1^X \cup U_1^Y)$ e $W_2 = \pi(U_2^X \cup U_2^Y)$ sono aperti disgiunti (in quanto proiezione di aperti saturi disgiunti) che contengono rispettivamente C_1 e C_2 .

- se $[x_0] \in C_1, [x_0] \notin C_2, x_0, y_0 \in \pi^{-1}(C_1) \Rightarrow x_0 \in C_1^X, y_0 \in C_1^Y$
Scegliendo U_1^X, U_1^Y come prima, $U_1^X \cup U_1^Y$ è saturo perché contiene sia x_0 sia y_0 , mentre $U_2^X \cup U_2^Y$ è saturo perché non contiene né x_0 né y_0
Dunque le loro proiezioni forniscono gli intorni di C_1 e C_2 richiesti. \square

Osserviamo che $X, Y T_4 \not\Rightarrow X \vee Y T_4$

esempio Consideriamo $X = \{x_0, x_1\}, \tau = \{\emptyset, X, \{x_0\}\}$
 $Y = \{y_0, y_1\}, \tau = \{\emptyset, Y, \{y_0\}\}$

Ora $\{[x_1]\}$ è chiuso in $X \vee Y$ in quanto $\pi^{-1}(\{[x_1]\}) = \{x_1\}$ che è chiuso in X ed è disgiunto da Y

Analogamente $\{[y_1]\}$ è chiuso in $X \vee Y$.

Sia ora U un aperto di $X \vee Y$ che contiene $\{[x_1]\}$

Allora $\pi^{-1}(U)$ è un aperto di $X \sqcup Y$ che contiene x_1 e

$\pi^{-1}(U) \cap X$ è un aperto di X che contiene x_1 .

Ma l'unico aperto di X che contiene x_1 è X , quindi

$\pi^{-1}(U) \cap X = X$, cioè $X \subseteq \pi^{-1}(U)$ e $i(X) \subseteq U$

Analogamente, se V è un aperto di $X \vee Y$ che contiene $[y_1]$, allora $j(Y) \subseteq V$.

Allora $[x_0] = [y_0]$ e $i(X) \cap j(Y) \subseteq U \cap V$, dunque $U \cap V \neq \emptyset$.

Per ciò $X \vee Y$ non è T_4 .

Def. Sia $\pi: X \rightarrow X/\sim$ una proiezione al quoziente

Un insieme $A \subseteq X$ si dice **saturato** se $A = \pi^{-1}(\pi(A))$,

cioè se A contiene tutte le classi di equivalenza che interseca

cioè se A è unione di classi di equivalenza

In generale, se $A \subseteq X$, l'insieme $\pi^{-1}(\pi(A))$ si chiama **saturato** di A .

Segue dalle definizioni che la mappa

$$X/\sim \ni B \longmapsto \pi^{-1}(B) \subseteq X$$

è una bigezione tra gli insiemi aperti di X/\sim e quello degli aperti saturati di X .

Fatti (1) $\pi: X \rightarrow X/\sim$ è aperta se e solo se il saturato di ogni aperto di X è aperto

Infatti, π è aperta $\iff \forall A \subseteq X, \pi(A)$ è aperto

$\iff \forall A \subseteq X$ aperto $\pi^{-1}(\pi(A)) \subseteq X$ è aperto

(2) π è chiusa se e solo se il saturato di ogni chiuso è chiuso

esempio $X = \mathbb{R}$, diciamo $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$

Chi è X/\sim ?



Idea: cercare un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ che incontra tutte le classi di equivalenza, restringere \sim a D , e capire se $X/\sim \cong D/\sim$

X/\sim è in bigezione naturale con D/\sim , ma sono omeomorfi?

In questo caso, proviamo con $D_1 = [0, 1)$ e $D_2 = [0, 1]$

È chiaro che entrambi intersecano tutte le classi di equivalenza, però:

1. la restrizione di \sim a D_1 è banale, per cui $D_1/\sim \cong D_1 = [0, 1)$

2. la restrizione di \sim a D_2 identifica 0 con 1, per cui $D_2/\sim \cong [0, 1]_{/0,1} \cong S^1$

Poiché $[0, 1) \not\cong S^1$ ($[0, 1)$ non è compatto ma S^1 sì),

X/\sim non può essere omeomorfo ad entrambi

Vedremo più avanti che D_2 soddisfa tutte le condizioni

di un dominio fondamentale, per cui $X/\sim \cong D_2/\sim \cong S^1$

Ci sono anche modi elementari per vedere che $X/\sim \cong D_2/\sim \cong S^1$

ad esempio, le mappe

$$[0, 1] \xleftarrow{i} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\sim$$

sono continue per definizione, per cui è indotta una mappa continua

$$[0, 1] \xleftarrow{i} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\sim$$

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow f \\ [0, 1]_{/0,1} & \xleftarrow{\pi'} & \mathbb{R}/\sim \end{array}$$

f è chiaramente bigettiva:

surgettiva perché $[0, 1]$ interseca tutte le classi di equivalenza

iniettiva perché gli unici punti distinti di $[0, 1]$ equivalenti sono 0 e 1.

f è continua per la proprietà universale

Per concludere che è omeomorfismo, basta dire che $[0, 1]_{/0,1}$ è compatto e \mathbb{R}/\sim è T_2

Poiché $\pi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]_{/0,1}$ è continua e surgettiva, quindi $[0, 1]_{/0,1}$ è compatto.

Per vedere che \mathbb{R}/\sim è T_2 , siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x - y \notin \mathbb{Z}$: se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo, allora

$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (x+n-\varepsilon, x+n+\varepsilon)$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (y+n-\varepsilon, y+n+\varepsilon)$ sono aperti saturati disgiunti che contengono x e y , le cui proiezioni danno interni disgiunti di $[x]$ e $[y]$

- Fatti
- (1) Se $A \subseteq X$ è un aperto saturo, $\pi(A) \subseteq X/\sim$ è aperto
 - (2) Se $A \cap B = \emptyset$ e A e B sono saturi, allora $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$

l'esempio appena fatto è un'istanza particolare di quoziente per un'azione di gruppo.

DEF. Sia G gruppo, X insieme.

Un'azione di G su X è una mappa

$$\varphi: G \times X \longrightarrow X \quad \text{tale che}$$

$$(1) \varphi(e, x) = x \quad \forall x \in X$$

$$(2) \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x) \quad \forall g, h \in G \quad \forall x \in X$$

Indicheremo $\varphi(g, x) = g \cdot x$

In tale notazione, (1) $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$

$$(2) g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \quad \forall g, h \in G \quad \forall x \in X$$

Fissato $g \in G$, si può definire la moltiplicazione o traslazione sinistra

$$l_g: X \longrightarrow X, \quad l_g(x) = g \cdot x$$

$$\text{Poiché } l_g(l_g^{-1}(x)) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = x$$

si ha che l_g è bigettiva e $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$

Perciò un'azione induce una mappa

$$\psi: G \longrightarrow S(G)$$

$$g \longmapsto l_g$$

che è un omomorfismo di gruppi.

DEF. Un'azione si dice

• fedele se $l_g = \text{id} \iff g = e$

• libera se $\forall g \neq e$ e $\forall x \in X, g \cdot x \neq x$

cioè se $\exists x \in X$ t.c. $g \cdot x = x$ allora $g = e$

• transitiva se $\forall x, y \in X \exists g \in G$ t.c. $g \cdot x = y$

lo stabilizzatore di $x_0 \in X$ è

$$\text{Stab}(x_0) = \{g \in G \mid g \cdot x_0 = x_0\}$$

è chiaramente un sottogruppo di G

e l'azione è libera $\iff \text{Stab}(x_0) = \{e\} \quad \forall x_0 \in X$

l'orbita di $x_0 \in X$ è l'insieme

$$G \cdot x_0 = \{g \cdot x_0 \mid g \in G\}$$

Ogni azione definisce una relazione di equivalenza:

dati $x, y \in X, x \sim y \iff \exists g \in G$ t.c. $g \cdot x = y \iff x, y$ appartengono alla stessa orbita

Le classi di equivalenza sono le orbite

esempio $G = \mathbb{Z}$ agisce su $X = \mathbb{R}$ così: $n \cdot x = n + x$

In questo caso, $x \sim y \iff \exists n \in \mathbb{Z}$ t.c. $y = n + x \iff x - y \in \mathbb{Z}$

l'insieme quoziente si denota spesso X/G

(per le azioni sinistre, sarebbe più corretto $G \backslash X$)

D'ora in poi, X sarà uno spazio topologico e
 assumeremo che le azioni di G su X saranno continue,
 cioè $l_g: X \rightarrow X$ sarà continua $\forall g \in G$
 Automaticamente, $l_{g^{-1}} = l_g^{-1}$ sarà continua,
 quindi l_g è un omeomorfismo

Considereremo poi $\pi: X \rightarrow X/G$ e lo spazio topologico quoziente

Fatti (1) Dato $A \subseteq X$, il saturato di A è

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot A = G \cdot A$$

(2) Dunque $A = X$ è saturo \iff è G -invariante (cioè $G \cdot A = A$)

proposizione (1) $\pi: X \rightarrow X/G$ è aperta
 (2) Se G è finito, π è chiusa

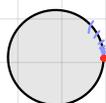
DIMOSTRAZIONE

(1) Se $A \subseteq X$ è aperto, il suo saturato $\bigcup_{g \in G} g \cdot A$ è unione di aperti
 (g agisce come omeomorfismo, dunque $g \cdot A$ è aperto $\forall g \in G$)
 dunque è aperto

(2) se $C \subseteq X$ è chiuso e G è finito, il suo saturato $\bigcup_{g \in G} g \cdot C$ è unione
 finita di chiusi, per cui è chiuso. □

Il quoziente per un'azione può non essere una mappa chiusa, se G è infinito

esempio $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$, si ha



$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

Se $C = \{n + \frac{1}{n}, n \geq 2\}$ allora $\pi(C)$ non è chiuso perché
 $\pi(C) \ni [0]$, ma $\pi(C) \not\ni [0]$

In generale, gli assiomi di separazione non vengono preservati
 nemmeno nei quozienti per azioni di gruppo

esempio (1) $G = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$, dove \mathbb{Q} agisce per traslazione
 Allora \mathbb{R}/\mathbb{Q} (da non confondere con \mathbb{R}/\mathbb{Q} ottenuto per collassamento)
 non è T_1 (anzi, ha topologia indiscreta)
 Infatti, se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto saturo non vuoto,
 allora $\exists x_0 \in A, \varepsilon > 0$ t.c. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$
 Essendo saturo, A contiene $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (x_0 - \varepsilon + q, x_0 + \varepsilon + q) = \mathbb{R}$

(2) $X = M(2, \mathbb{R})$ topologizzate come \mathbb{R}^4

$G = GL_2(\mathbb{R})$ agisce per coniugio

Anche qui X/G non è T_1

Per mostrarlo, basta trovare un punto di X/G che non è chiuso, cioè un'orbita in X che non è chiusa

Ad esempio, l'orbita della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ contiene tutte le matrici della forma $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon \neq 0$

Se tale orbita fosse chiusa, conterrebbe anche

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 2^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, che però non è coniugata a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DEF Un'azione $G \curvearrowright X$ su uno spazio topologico X si dice

• **vagante** se ogni $x_0 \in X$ ha un intorno U t.c.

$\{g: g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ sia finito

• **propriamente discontinua** se ogni $x_0 \in X$ ha un intorno U t.c.

$\{g: g \cdot U \cap U \neq \emptyset\} = \{e\}$

• **propria** se $\forall K = X$ compatto, l'insieme $\{g: g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ è finito

(Attenzione: la terminologia dipende dagli autori)

teorema Sia X T_2 . Un'azione su X è propriamente discontinua se e solo se è libera e vagante

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) chiaro: propriamente discontinua \Rightarrow vagante

Inoltre, dato $x_0 \in X$, se $\exists g \in G: g \cdot x_0 = x_0$, allora $g \in \{g: g \cdot U_{x_0} \cap U_{x_0} \neq \emptyset\} = \{e\}$

$\Rightarrow g = e \Rightarrow$ l'azione è libera

(\Leftarrow) Sia $x \in X$. Poiché l'azione è vagante, $\exists U$ intorno di x t.c.

$\{g: g \cdot U \cap U \neq \emptyset\} = \{e, g_1, \dots, g_n\}$ è finito

Dato che è libera, $g_n \cdot x \neq x$

Poiché X è T_2 , $\exists V \in I(x), W \in I(g_n \cdot x)$ t.c. $V \cap W = \emptyset$

Sia ora $U' = g_n^{-1} \cdot (g_n \cdot U \cap W) \cap V$ intorno di x :

vale che $\{g: g \cdot U' \cap U' \neq \emptyset\} = \{e, g_1, \dots, g_n\}$

Inoltre $g_n \notin \{g: g \cdot U' \cap U' \neq \emptyset\}$, infatti

$g_n \cdot U' \cap U' = (g_n \cdot U \cap W) \cap g_n \cdot V \cap g_n^{-1} \cdot (g_n \cdot U \cap W) \cap V = \emptyset$ perché $V \cap W = \emptyset$

Iterando il procedimento, si trova $U^{(m)}$ intorno di x

t.c. $\{g: g \cdot U^{(m)} \cap U^{(m)} \neq \emptyset\} = \{e\}$, cioè l'azione è propriamente discontinua \square

teorema X localmente compatto. Allora un'azione su G è propria se e solo se $\forall x, y \in X \exists U \in I(x), V \in I(y)$ t.c. $\{g: g \cdot U \cap V \neq \emptyset\}$ è finito

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) Poiché X è localmente compatto, posso scegliere $U \in I(x), V \in I(y)$ compatti, porre $K = U \cup V$ e osservare che

$$\{g: g \cdot U \cap V \neq \emptyset\} \subseteq \{g: g \cdot K \cap K \neq \emptyset\} \text{ finito}$$

(\Leftarrow) (Vale anche senza locale compattezza)

Sia $K \subseteq X$ compatto. Fissiamo $x_0 \in K$ e $\forall y \in K$, siano $U_y \in I(x_0), V_y \in I(y)$ t.c. $\{g: g \cdot U_y \cap V_y \neq \emptyset\}$ sia finito

Posso assumere U_y, V_y aperti (prendendo le loro parti interne).

Per compattezza di K , poiché $K \subseteq \bigcup_{y \in K} V_y$, $\exists y_1, \dots, y_n$ con $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$

Pongo $U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, che è aperto in quanto intersezione finita di aperti.

Inoltre, $\{g: g \cdot U_{x_0} \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \{g: g \cdot U_{x_0} \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) \neq \emptyset\} =$

$$= \bigcup_{i=1}^n \{g: g \cdot U_{x_0} \cap V_{y_i} \neq \emptyset\} = \bigcup_{i=1}^n \{g: g \cdot U_{y_i} \cap V_{y_i} \neq \emptyset\} \text{ che è finito}$$

Dunque $\{g: g \cdot U_{x_0} \cap K \neq \emptyset\}$ è finito.

Ora $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$, da cui per compattezza $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_{x_j}$

Infine $\{g: g \cdot K \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \{g: g \cdot (\bigcup_{j=1}^m U_{x_j}) \cap K \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{g: g \cdot U_{x_j} \cap K \neq \emptyset\}$ che è finito \square

teorema $X T_2$. Supponiamo che $\forall x, y \in X \exists U \in I(x), V \in I(y)$ tali che $|\{g: g \cdot U \cap V \neq \emptyset\}| < +\infty$. Allora X/G è T_2

DIMOSTRAZIONE

Siano $[x], [y]$ punti distinti di X/G

Cerco due aperti saturi disgiunti di X che contengano x e y (e dunque tutte le loro orbite). Se li trovo, le loro proiezioni saranno aperte e disgiunte, e forniranno perciò gli intorni di $[x]$ e $[y]$

Per ipotesi, $\exists U \in I(x), V \in I(y)$ t.c. $\{g: g \cdot U \cap V \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\}$ è finito.

Poiché $[x] \neq [y]$, $g_i \cdot x \neq y \forall i=1, \dots, n$

Posso anche assumere $U \cap V = \emptyset$ perché X è T_2

(perciò se fosse $U \cap V \neq \emptyset$, posso intersecarli con intorni aperti disgiunti)

Poiché X è T_2 , $\forall i=1, \dots, n \exists W_i \in I(g_i \cdot x), V_i \in I(y)$ aperti t.c. $W_i \cap V_i = \emptyset$

Pongo $\hat{V} = V \cap \bigcap_{i=1}^n V_i$ che è intersezione finita di intorni aperti di y ,

quindi è intorno aperto di y

$\hat{U} = U \cap \bigcap_{i=1}^n g_i \cdot W_i$ che analogamente è un intorno aperto di x

Per concludere, basta verificare che i saturati di \hat{U} e \hat{V} (che sono aperti) siano disgiunti, cioè

$$\left(\bigcup_{g \in G} g \cdot \hat{U} \right) \cap \left(\bigcup_{g \in G} g \cdot \hat{V} \right) = \emptyset$$

Se così non fosse, $\exists g, h \in G$ t.c. $g \cdot \hat{U} \cap h \cdot \hat{V} \neq \emptyset$, da cui

$(h^{-1}g) \cdot \hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset$, cioè, a meno di ribattezzare $h^{-1}g$ come g ,

$$\exists g \in G \text{ t.c. } g \cdot \hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset$$

Però $\hat{U} \subseteq U, \hat{V} \subseteq V$, per cui $g \cdot U \cap V \neq \emptyset$, dunque $g = g_i$ per qualche $i=1, \dots, n$

Dunque $g_i \cdot \hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset$, ma $\hat{U} \subseteq g_i \cdot W_i$ e $\hat{V} \subseteq V_i$,

$$\text{dunque otterrei } \emptyset \neq g_i \cdot (g_i \cdot W_i) \cap V_i = W_i \cap V_i \quad \downarrow$$

\square

DEF Data un'azione $G \curvearrowright X$, un **dominio fondamentale** per l'azione è un sottoinsieme $D \subseteq X$ tale che

- (1) D è chiuso
- (2) $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$ (cioè $\pi(D) = X/G$)
- (3) la famiglia $\{g \cdot D, g \in G\}$ è localmente finita in X
- (4) $\forall g \neq e, g \cdot D \cap D = \emptyset$

esempio $[0,1]$ (ma anche $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ o $[0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2]$)
 è un dominio fondamentale per l'azione $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ tramite traslazione

esempio Consideriamo l'azione $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ per traslazione: $(n,m) \cdot (x,y) = (x+n, y+m)$
 Dico che $[0,1]^2$ è un dominio fondamentale:
 è chiuso, i suoi traslati ricoprono \mathbb{R}^2 , $\{g \cdot D | g \in G\}$ è localmente finita
 ed è chiaro che in $(0,1)^2$ non ci sono punti distinti equivalenti, per cui $g \cdot D \cap D = \emptyset$

d'idea generale è che la parte interna di D si proietta iniettivamente su X/G
 e le identificazioni rimangono sul bordo $\partial D = D \cap D = D \cdot D$

teorema X localmente compatto, D dominio fondamentale per un'azione $G \curvearrowright X$. Allora:

- (1) se $X \in T_2$, allora $X/G \in T_2$
- (2) $X/G \cong D/N$

DIMOSTRAZIONE

(1) Poiché X è localmente compatto e T_2 , basta vedere che l'azione è propria.

Sia $K \subseteq X$ compatto. Vediamo che $\{g: g \cdot D \cap K \neq \emptyset\}$ è finito.

Per locale finitezza dei $g \cdot D$, $\forall x \in K$ esiste U_x intorno aperto di x in X

t.c. $\{g: g \cdot D \cap U_x \neq \emptyset\}$ è finito. Per compattezza di K ,

il ricoprimento $\{U_x, x \in K\}$ di K ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$

Ora $\{g: g \cdot D \cap K \neq \emptyset\} = \{g: g \cdot D \cap (\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}) \neq \emptyset\} = \bigcup_{i=1}^n \{g: g \cdot D \cap U_{x_i} \neq \emptyset\}$ è finito

Osserviamo che, perciò, poiché i $g \cdot D, g \in G$, ricoprono X , $K \subseteq g_1 \cdot D \cup \dots \cup g_n \cdot D$

Ora, dato $g \in G$, $g \cdot K \cap K \neq \emptyset \Rightarrow g \cdot K \cap (g_1 \cdot D \cup \dots \cup g_n \cdot D) \neq \emptyset$

$\Rightarrow K \cap (g^{-1}g_1 \cdot D \cup \dots \cup g^{-1}g_n \cdot D) \neq \emptyset \Rightarrow \exists i=1, \dots, n$ t.c. $K \cap g^{-1}g_i \cdot D \neq \emptyset$

$\Rightarrow g^{-1}g_i = g_j$ per qualche $j=1, \dots, n \Rightarrow g = g_i g_j^{-1}$ per qualche i, j

Dunque $|\{g: g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}| \leq n^2$

(2) da composizione $D \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/G$ è continua e surgettiva per una delle proprietà del dominio fondamentale.

Dunque tale mappa induce $\bar{\pi}: D/N \rightarrow X/G$ continua e bigettiva

(in quanto se $x, y \in D$, allora $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x \sim y$)

Per concludere, basta vedere che $\bar{\pi}$ è chiusa, o che $\pi \circ i: D \rightarrow X/G$ è chiusa

(in tal caso sarà un'identificazione e definirà perciò un omeomorfismo $D/N \cong X/G$)

Sia $C \subseteq D$ chiuso. Voglio vedere che $\pi(i(C)) \subseteq X/G$ è chiuso, cioè che $\pi^{-1}(\pi(i(C))) \subseteq X$ è chiuso, cioè che il saturato di $i(C) = C$ è chiuso, cioè che $\bigcup_{g \in G} g \cdot C$ è chiuso in X .

Poiché D è chiuso in X , l'insieme C , essendo chiuso di un chiuso, è chiuso in X .

Inoltre, poiché $C \subseteq D$ e $\{g \cdot D \mid g \in G\}$ è una famiglia localmente finita, anche $\{g \cdot C \mid g \in G\}$ è una famiglia localmente finita.

Infine $g: X \rightarrow X$ (cioè l_g) è un omeomorfismo $\forall g \in G$, per cui $g \cdot C = l_g(C)$ è chiuso in $X \forall g \in G$.

Perciò $\bigcup_{g \in G} g \cdot C$ è unione localmente finita di chiusi, e perciò è chiuso. \square

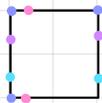
esempio (1) IL TORO

Il toro è una superficie omeomorfa a $S^1 \times S^1$

Vediamo che $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \text{toro}$

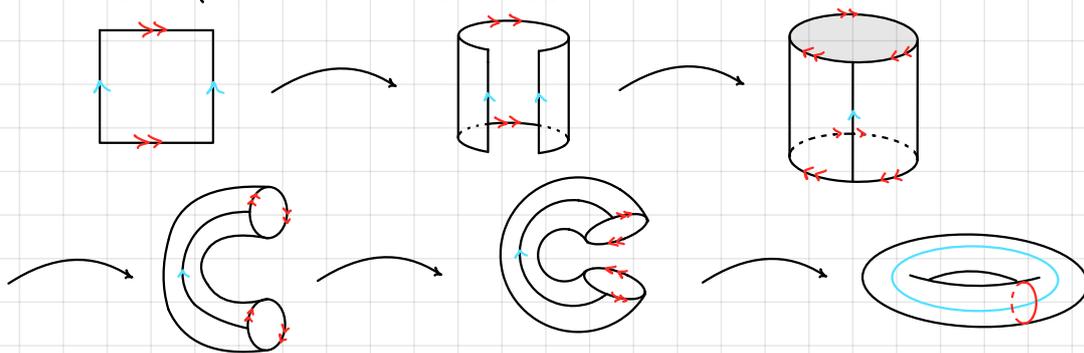
Abbiamo visto che un dominio fondamentale per l'azione di \mathbb{Z}^2 su \mathbb{R}^2 tramite traslazioni è il quadrato $D = [0,1]^2$

Chi è la relazione \sim indotta dall'azione su D ?



Punti dello stesso colore sono identificati.

Graficamente, queste identificazioni si descrivono mettendo delle frecce sui lati, e stipelandolo che frecce uguali vengono identificate nel verso prescritto dalla freccia:



Si può vedere che $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$ anche formalmente:

si definisce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ (con $S^1 \cong \mathbb{C}$)

come $f(\theta, \varphi) = (e^{2i\pi\theta}, e^{2i\pi\varphi})$

f è continua e surgettiva, e due punti di \mathbb{R}^2 sono equivalenti se e solo se sono \mathbb{Z}^2 -equivalenti

Dunque f induce $\bar{f}: \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ continua e bigettiva

Ora $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è compatto (perché, se $D = [0,1]^2$,

$\pi \circ i: D \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è continua e surgettiva, e D è compatto)

e $S^1 \times S^1$ è T_2 , dunque \bar{f} è un omeomorfismo

(2) Sia $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e sia $G \curvearrowright \mathbb{R}^2$ l'azione

$$[m] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi m}{n} & -\sin \frac{2\pi m}{n} \\ \sin \frac{2\pi m}{n} & \cos \frac{2\pi m}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(matrice di SO_2 che rappresenta la rotazione di angolo $\frac{2\pi m}{n}$)

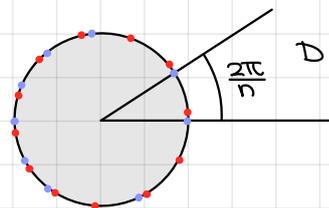
Perché G è finito, l'azione è propria e vagante

Non è libera perché $\text{Stab}((0,0)) = G$

Però $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, g \cdot p = p \Rightarrow g = [0]$

Un dominio fondamentale è

$$D = \{Re^{i\theta} \mid R > 0, 0 \leq \theta < \frac{2\pi}{n}\} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$



Le identificazioni rimaste sul bordo di D sono



Il suo risultato è un cono, che è a suo volta omeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Formalmente si può considerare $f: \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, f(z) = z^n$

che è continua e surgettiva. Inoltre $f(z) = f(w) \Leftrightarrow z^n = w^n$

$\Leftrightarrow (zw^{-1})^n = 1 \Leftrightarrow zw^{-1}$ è una radice n -esima dell'unità

$\Leftrightarrow zw^{-1} = e^{\frac{2\pi i m}{n}}$ per qualche $m \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Leftrightarrow z = g \cdot w$ per qualche $g \in G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Quindi f passa al quoziente definendo $\bar{f}: \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua e bigettiva.

Per concludere basta osservare che \bar{f} è un'identificazione, in quanto è aperta

(vedremo che tutte le funzioni omeomorfe non costanti sono aperte)

(è anche chiusa, si può fare per esercizio)

Topologia degli spazi proiettivi

Se $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , K^n ha una sua topologia (quella euclidea), che induce una topologia su $K^n \setminus \{0\}$, che induce una topologia su $\mathbb{P}^n(K)$.

Dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hanno una loro naturale topologia.

Studiamola a partire dal caso $K = \mathbb{R}$

Osserviamo innanzitutto che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è quoziente per l'azione del gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che agisce su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ così: $\lambda \cdot v = \lambda v$

Questa azione è libera ($\lambda v = v \Rightarrow \lambda = 1$ perché $v \neq 0$)

ma non è né propria, né vagante, né perciò propriamente discontinua.

Osserviamo però che ogni orbita contiene vettori di norma 1

(ne contiene esattamente 2: l'orbita di v dai $\frac{v}{\|v\|}$ e $-\frac{v}{\|v\|}$), per cui

la restrizione di $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a $S^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$ è surgettiva.

teorema $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n / \pm \text{Id} \cong S^n / \sim$
dove $v \sim w \iff v = \pm w$

DIMOSTRAZIONE

$S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è continua e surgettiva,

ed induce una mappa continua e bigettiva $\bar{f}: S^n / \sim \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Ora S^n / \sim è compatto, per cui potrei dimostrare separatamente che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2 , e concludere che \bar{f} è omeomorfismo. Procediamo però diversamente, ed esibiamo un'inversa continua.

Sia $g: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$, $g(v) = \frac{v}{\|v\|}$, che è continua e surgettiva.

La composizione $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n \rightarrow S^n / \sim$ è continua e surgettiva

e induce una mappa $\bar{g}: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \rightarrow S^n / \sim$ che è continua e bigettiva

(relazione del proiettivo)

(in quanto due punti di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ finiscono nello stesso punto di

S^n / \sim se e solo se sono multipli uno dell'altro)

Per costruzione \bar{f} e \bar{g} sono una inversa dell'altra,

per cui sono omeomorfismi. □

corollario $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto, T_2 e connesso per archi.

DIMOSTRAZIONE

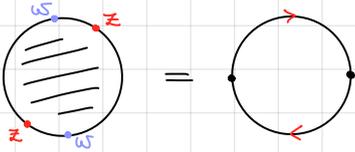
Essendo quoziente di S^n , che è compatto, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto.

Inoltre, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è T_2 e localmente compatto, e l'azione di $G = \{\pm \text{Id}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è propria perché G è finito, dunque $S^n / \pm \text{Id}$ è T_2 .

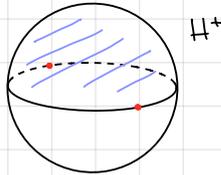
La connessione per archi discende dal fatto che $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è connesso per archi (se $n \geq 1$) e $\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) = \{\text{pt.}\}$ □

Osserviamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è omeomorfo anche a D^n/\sim , dove

$$D^n = \{\sigma \in \mathbb{R}^n \mid \|\sigma\| \leq 1\} \text{ e } \sigma \sim \omega \iff \sigma = \omega \text{ o } \|\sigma\| = \|\omega\| = 1 \text{ e } \sigma = -\omega$$



Infatti, l'emisfero nord di S^n , cioè $H^+ = \{\sigma \in S^n \text{ con ultima coordinata } \geq 0\}$, è un dominio fondamentale per l'azione di $\pm \text{Id}$ su S^n .



Dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong H^+/\sim$ dove \sim identifica gli antipodali sull'equatore.
 Ma $H^+ \cong D^n$ tramite un omeomorfismo (la proiezione all'iperpiano orizzontale) che induce un omeomorfismo tra $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong H^+/\sim$ e D^n/\sim

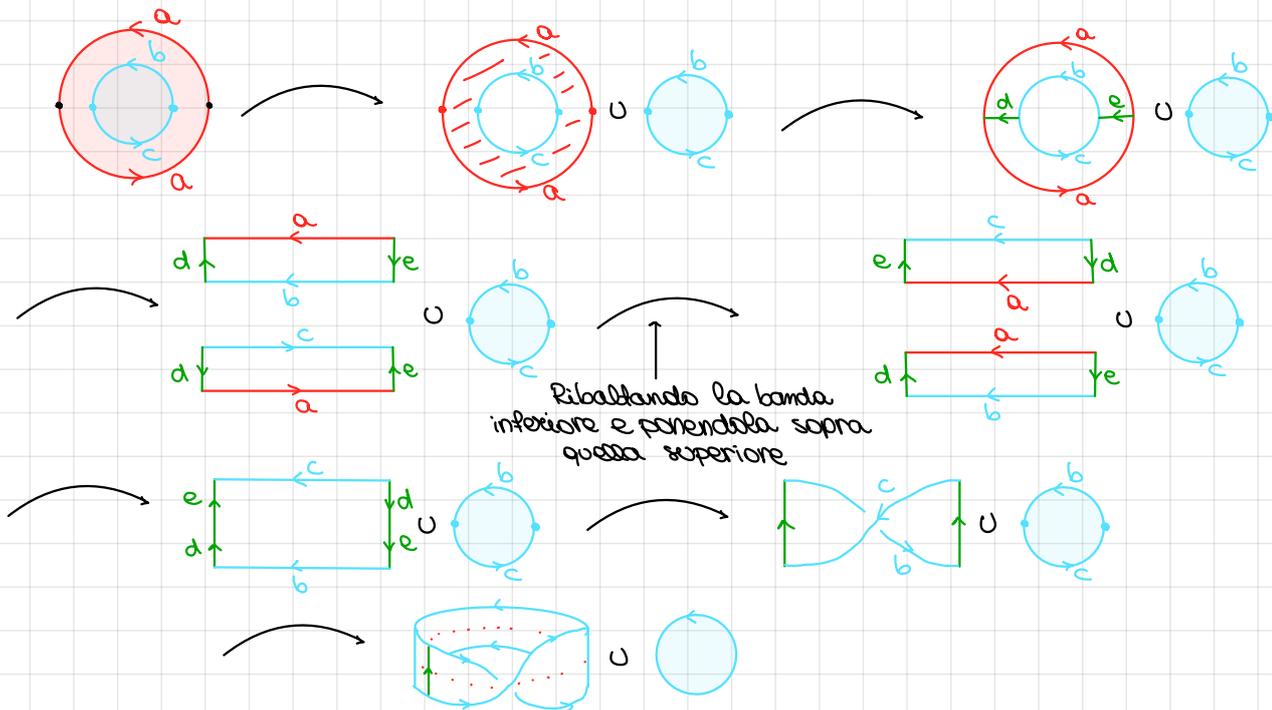
Casi $n=0,1$

- $n=0$: $\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) = \{\text{pt.}\}$
- $n=1$: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = D^1/\sim = [-1,1]/\sim_{\pm 1,1} = S^1$

Cerchiamo di capire com'è fatto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, tenendo presente il fatto (che non sappiamo dimostrare ma è vero) che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è omeomorfo ad alcun sottospazio di \mathbb{R}^3

Abbiamo visto che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = D^2/\sim$, il quoziente di D^2 rispetto all'identificazione di punti antipodali sul bordo

Partiamo da qui e procediamo con del "cut and paste",



Perciò $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottiene "tappando" il nastro di Möbius con un disco.

Formalmente, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \text{Möbius} \cup D^2/\sim$, dove \sim identifica il bordo del nastro di Möbius al bordo di D^2 tramite un omeomorfismo di tali bordi.

Caso $K = \mathbb{C}$

Come nel caso reale, se $S^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{2n+1} \text{ t.c. } \|v\| = 1\}$

Ogni $v \in \mathbb{C}^{2n+1} \setminus \{0\}$ ha un rappresentante $\frac{v}{\|v\|} \in S^{2n+1}$

per cui la proiezione $\pi: \mathbb{C}^{2n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si restringe a una mappa surgettiva $\pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Questo già ci dice che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è connesso per archi e compatto.

Purtroppo S^{2n+1} contiene orbite "grandi": se $v \in S^{2n+1}$, $w \sim v$, $w \in S^{2n+1} \iff w = \lambda v$, $\|w\| = 1 = \|v\|$
 $\iff |\lambda| = 1 \iff \lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

In effetti, se pensiamo S^1 come gruppo moltiplicativo, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = S^{2n+1}/S^1$
dove S^1 agisce su S^{2n+1} tramite $\lambda \cdot v = \lambda v$

Questa azione non è vagante né propria, per cui non possiamo dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è T_2 con lo stesso argomento del caso reale.

teorema $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è T_2

DIMOSTRAZIONE

Dati $P, Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ distinti, esiste sempre un iperpiano H che non contiene né P né Q . Quindi $P, Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus H \cong \mathbb{C}^n$, che è T_2 , quindi posso separare P e Q . \square

Per capire chi sia $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ($\mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \{pt\}$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, verrà studiato più avanti), cerchiamo di capire il ruolo topologico delle carte affini. Questo che diremo ora vale per $K = \mathbb{R}$ e $K = \mathbb{C}$

teorema

$\forall i=0, \dots, n$ la carta affine

$J_i: \mathbb{K}^n \rightarrow U_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, con $J_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x_n)$
 è un'immersione topologica aperta.

DIMOSTRAZIONE

Vediamo il caso $i=0$

Ricordiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0$ con $U_0 = \{[x_0, \dots, x_n], x_0 \neq 0\}$, $H_0 = \{[x_0, \dots, x_n], x_0 = 0\}$

Già sappiamo che $J_0: \mathbb{K}^n \rightarrow U_0$ è bigettiva, per cui rimane da vedere che J_0 è continua, J_0^{-1} è continua e U_0 è aperto.

• U_0 aperto: $\pi^{-1}(U_0) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid \text{t.c. } x_0 \neq 0\}$ che è chiaramente aperto in \mathbb{K}^{n+1} , quindi U_0 è aperto.

• J_0 continua: $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n) \mapsto [1, x_1, \dots, x_n]$$

dunque J_0 è composizione di funzioni continue

• J_0^{-1} è continua:

Sia $W_0 \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$, $W_0 = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 \neq 0\}$ e sia $f: W_0 \rightarrow \mathbb{K}^n$
 con $f(x_0, \dots, x_n) = (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$

f è continua ed induce per passaggio al quoziente

$J_0^{-1}: W_0 / \sim = U_0 \rightarrow \mathbb{K}^n$ che è continua per la proprietà universale

(Qui devo osservare che W_0 / \sim (con la topologia quoziente di W_0) coincide con quella di U_0 come sottospazio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, cioè che se restringo e quoziento ottengo la stessa cosa che otterrei quozientando e restringendo)

Qui torna tutto perché W_0 è un aperto saturo

□

Usando quanto visto, possiamo dimostrare il seguente.

teorema

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$$

DIMOSTRAZIONE

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è compatto e T_2 e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus H_0 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$
 (t.c.)

Per unicità della compattificazione di Alexandrov,

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è omeomorfo alla compattificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^2 , che è S^2

□

DEF. Una varietà topologica è uno spazio topologico X t.c.

- (1) $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall x_0 \in X$ ha un intorno aperto U omeomorfo ad una palla aperta di \mathbb{R}^n
- (2) X è T_2
- (3) X è a base numerabile

Il numero n che compare in (1) si chiama dimensione della varietà.

esempio

- (1) \mathbb{R}^n è una varietà n -dimensionale
- (2) \mathbb{C}^n è una varietà $2n$ -dimensionale
- (3) S^n è una varietà n -dimensionale:

$S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ e $S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$ tramite le proiezioni stereografiche, per cui ogni punto di S^n ha un intorno aperto omeomorfo a \mathbb{R}^n .

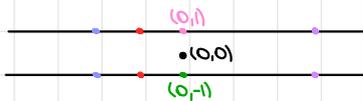
Ma \mathbb{R}^n è a sua volta omeomorfo a una palla aperta di \mathbb{R}^n , da cui la tesi. In effetti, la condizione (1) equivale a richiedere, $\forall x_0 \in X$, un intorno aperto U omeomorfo a \mathbb{R}^n , oppure un intorno aperto U omeomorfo a un aperto di \mathbb{R}^n

- (4) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietà n -dimensionale
Infatti, U_0, \dots, U_n (codomini delle carte affini) sono un ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con aperti omeomorfi a \mathbb{R}^n
- (5) $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà $2n$ -dimensionale
(stessa ragione di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$)

Ci si potrebbe chiedere se, nella definizione di varietà topologica, (1) \Rightarrow (2) (cioè localmente euclideo implica Hausdorff), ma questo è falso.

esempio

$X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\} / \sim$, $(x, \varepsilon) \sim (y, \varepsilon')$ se sono uguali oppure $x = y = 0$



Identifico le due rette eccetto

i punti di ascissa 0 (retta con punto doppio)

X è T_1 : $\forall p \in X$, $\pi^{-1}(p)$ consiste di 1 o 2 punti, ed è dunque chiusa per cui i punti di X sono chiusi (lo spazio $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ è T_1 in quanto sottospazio di T_1 , quindi i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi)

X non è T_2 : siano U intorno aperto di $(0, -1)$ e V un intorno aperto di $(0, 1)$. Allora $\pi^{-1}(U) \cong \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ è un aperto (automaticamente saturo), dunque, essendo aperto, contiene $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{-1\}$ per qualche $\varepsilon > 0$, ed essendo saturo anche $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{-1\}) \setminus \{(0, -1)\}$

Analogamente, $\exists \varepsilon' > 0$ t.c. $\pi^{-1}(V)$ contiene $((-\varepsilon', \varepsilon') \times \{1\}) \cup ((-\varepsilon', \varepsilon') \times \{-1\}) \setminus \{(0, -1)\}$

Donque $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset$ da cui $U \cap V \neq \emptyset$

X è localmente euclideo: $\forall x \in X$ $\exists U$ intorno di x con $U \cong \mathbb{R}$

Considero $U = X \setminus \{(0, -1)\}$, che è aperto (perché X è T_1)

considero $i: \mathbb{R} \rightarrow X: x \mapsto [(x, 1)]$

i è continua perché composizione di $x \mapsto (x, 1) \xrightarrow{\pi} [(x, 1)]$

i è immersione: devo trovare $j: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c. $j \circ i = \text{id}_{\mathbb{R}}: j([(x, \varepsilon)]) = x$

$j \circ i(x) = j([(x, 1)]) = x \Rightarrow j \circ i = \text{id}$

j è continua perché indotta da $J: \mathbb{R} \times \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}: (x, \varepsilon) \mapsto x$

Quindi $i(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ ma $i(\mathbb{R}) = U$, quindi tutti i punti di U sono in U aperto omeomorfo a \mathbb{R}

Analogo con $U' = X \setminus \{(0, 1)\}$ e $i'(x) = [(x, -1)]$

TEORIA DELL'OMOTOPIA

E' una tecnica per mostrare che due spazi non sono omeomorfi.
l'omotopia è un concetto più debole di omeomorfismo.

DEF. Due funzioni $f, g: X \rightarrow Y$ continue
Una omotopia tra f e g è una mappa

$$H: X \times [0,1] \rightarrow Y \text{ tale che}$$

(1) H è continua

(2) $H(x,0) = f(x) \quad \forall x \in X$ e $H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$

NOTAZIONE Se esiste un'omotopia H tra f e g , diciamo che f e g sono omotope e scriviamo $f \sim g$

esempio Sia $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dico che $f \equiv 1$ e $g \equiv 2$ sono omotope

In fatti considerando $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$

$$H(x,t) = (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$$

H è continua e $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$

Dico che $f \equiv 1$ e $g \equiv -1$ non sono omotope

Se esistesse l'omotopia tra f e g , avrei

$$\emptyset \neq H^{-1}((0, +\infty)) \neq \underbrace{\mathbb{R} \times \{0\}}_{\mathbb{R} \times \{0\}} \cup \underbrace{\mathbb{R} \times \{1\}}_{\mathbb{R} \times \{1\}}$$

ma $H^{-1}((0, +\infty))$ è sia aperto che chiuso in $\mathbb{R} \times [0,1]$ connesso \downarrow

proposizione la relazione di essere omotope è una relazione di equivalenza su $C^0(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \text{ continua}\}$

DIMOSTRAZIONE

(1) **Reflessività**: poniamo $H(x,t) = f(x) \quad \forall (x,t) \in X \times [0,1]$

H è continua e $H(x,0) = H(x,1) = f(x)$

Quindi H è omotopia tra f e f : $f \sim f$

(2) **Simmetria**: sia H omotopia tra f e g

Definiamo $\tilde{H}(x,t) = H(x,1-t)$: \tilde{H} è continua e

$$\tilde{H}(x,0) = H(x,1) = g(x) \text{ e } \tilde{H}(x,1) = H(x,0) = f(x)$$

Quindi \tilde{H} è omotopia tra g e f .

(3) **Transitività**: siano $f, g, h: X \rightarrow Y$ continue con $f \sim g, g \sim h$

\Rightarrow esistono $H_1, H_2: X \times [0,1] \rightarrow Y$ continue con

$$H_1(x,0) = f(x), H_1(x,1) = g(x) \text{ e } H_2(x,0) = g(x), H_2(x,1) = h(x) \quad \forall x \in X$$

Definiamo $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(x,2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

• H è ben definita, perché $H_1(x,1) = H_2(x,0) = g(x) \quad \forall x \in X$

• $H(x,0) = H_1(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = H_2(x,1) = h(x)$

• H è continua perché $\{X \times [0, \frac{1}{2}], X \times [\frac{1}{2}, 1]\}$ è un ricoprimento chiuso finito, quindi fondamentale

Quindi H è omotopia tra f e h .

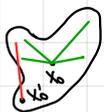
□

DEF. Chiamiamo $[X, Y] = C^0(X, Y) / \sim$

Un caso in cui $[X, Y]$ ha un solo elemento

DEF. Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato rispetto a $x_0 \in \Omega$ se per ogni $x \in \Omega$, Ω contiene il segmento di estremi x_0 e x , cioè $\forall x \in \Omega \quad [x_0, x] = \{tx_0 + (1-t)x \mid t \in [0, 1]\} \subseteq \Omega$

esempio



è stellato rispetto a x_0 , ma non rispetto a x_1

esempio \mathbb{R}^n è stellato

DEF. Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a ogni $x_0 \in \Omega$ si dice convesso

Oss Ω stellato rispetto a un qualsiasi punto $\Rightarrow \Omega$ connesso per archi.

proposizione Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a $x_0 \in \Omega$. Allora tutte le funzioni continue da X a Ω sono omotope

DIMOSTRAZIONE

Sia $f: X \rightarrow \Omega$ continua

Sia $c_{x_0}: X \rightarrow \Omega$ la funzione costantemente x_0 .

Mostro che $f \sim c_{x_0}$

Definisco $H: X \times [0, 1] \rightarrow \Omega$

$$H(x, t) = (1-t)f(x) + tx_0$$

Si come Ω stellato rispetto a x_0 , $H(x, t) \in \Omega \quad \forall t \in [0, 1], \forall x \in X$

H è continua perché f è continua.

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = x_0 \quad \forall x \in X$$

$\Rightarrow H$ è omotopia tra f e c_{x_0} .

Concludo per transitività. □

Oss Ho dimostrato che $[X, Y] = \{[c_{x_0}]\}$

esempio

Ogni funzione da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n è omotopa all'identità

La funzione $\text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è omotopa a una funzione costante

proposizione

Siano X, Y, Z spazi topologici.

Siano $f, f' : X \rightarrow Y, g, g' : Y \rightarrow Z$ con $f \sim f', g \sim g'$.

Allora $g \circ f \sim g' \circ f'$

DIMOSTRAZIONE

Siccome $f \sim f', \exists H_f : X \times [0,1] \rightarrow Y$ omotopia tra f e f' .

Siccome $g \sim g', \exists H_g : Y \times [0,1] \rightarrow Z$ omotopia tra g e g' .

Definiamo $H : X \times [0,1] \rightarrow Z$

$$H(x,t) = H_g(H_f(x,t), t)$$

$$\bullet H(x,0) = H_g(H_f(x,0), 0) = H_g(f(x), 0) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

$$H(x,1) = H_g(H_f(x,1), 1) = H_g(f'(x), 1) = g'(f'(x)) = g' \circ f'(x) \quad \forall x \in X$$

$\bullet H$ è composizione di H_g e H_f continue, quindi H è continua.

$\Rightarrow H$ è omotopia tra $g \circ f$ e $g' \circ f'$ □

DEF. Sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Un' **inversa omotopica** di f è una funzione

$g : Y \rightarrow X$ continua t.c. $g \circ f \sim id_X, f \circ g \sim id_Y$

Se f ammette un' inversa omotopica, allora f si dice **equivalenza omotopica**.

Se esiste un' equivalenza omotopica da X in Y, X e Y si dicono

omotopicamente equivalenti o **omotopi**, e si indica con $X \sim Y$

esempio

(1) Un omeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ è un' equivalenza omotopica

(2) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto a x_0 . Allora $\Omega \sim \{x_0\}$

Infatti, sia $g : \{x_0\} \rightarrow \Omega$ e $c_{x_0} : \Omega \rightarrow \{x_0\}$, allora

$$c_{x_0} \circ g = id_{\{x_0\}} \text{ e } g \circ c_{x_0} : \Omega \rightarrow \Omega \Rightarrow g \circ c_{x_0} \sim id_{\Omega}$$

$\Rightarrow g$ è equivalenza omotopica

DEF. Se $X \sim \{pt.\}$, X si dice **contrattibile**

Vedremo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, S^1, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), S^1 \times S^1$ non sono contrattibili.

proposizione

l'omotopica equivalenza è una relazione d'equivalenza.

DIMOSTRAZIONE

Sia X spazio topologico.

Riflessività: id_X è equivalenza omotopica (è omeomorfismo)

Simmetria: se $g : Y \rightarrow X$ è inversa omotopica di $f : X \rightarrow Y$, allora f è inversa

omotopica di g . Quindi, se f è equivalenza omotopica, anche g lo è.

Dunque $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$

Transitività: Se $X \sim Y$ e $Y \sim Z \Rightarrow \exists f : X \rightarrow Y$ con r sua inversa omotopica,

e $\exists g : Y \rightarrow Z$ con s sua inversa omotopica.

Dico che $g \circ f$ è equivalenza omotopica, con inversa ros

$$\text{Infatti } f \circ r \sim id_Y, g \circ s \sim id_Z \Rightarrow (g \circ f) \circ (ros) = g \circ (f \circ r) \circ s \sim g \circ s \sim id_Z$$

$$\text{Quindi } (g \circ f) \circ (ros) \sim id_Z, \text{ analogamente } (ros) \circ (g \circ f) = id_X$$

Quindi $g \circ f$ è equivalenza e $X \sim Z$ □

componenti connesse e omotopia

DEF. Sia X spazio topologico

$$\pi_0(X) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\}$$

Una $f: X \rightarrow Y$ continua induce $f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$

(functorialità)

$C \mapsto$ componente cpa di Y
contenente $f(C)$

teorema Siano $f, g: X \rightarrow Y$ continue, con $f \sim g$
Allora $f_* \equiv g_*$

DIMOSTRAZIONE

Sia $x \in X$. Sia $[x] \in \pi_0(X)$ la componente di X contenente x

Mostro che $f_*([x]) = g_*([x])$

Ovvero $f(x)$ e $g(x)$ sono nella stessa componente di Y

Esibisco un cammino in Y tra $f(x)$ e $g(x)$:

siccome $f \sim g$, $\exists H$ omotopia tra f e g .

Definisco $\alpha_x: [0,1] \rightarrow Y$, $\alpha_x(t) = H(x,t) \in Y$

α_x è continua perché H è continua

$$\alpha_x(0) = H(x,0) = f(x), \quad \alpha_x(1) = H(x,1) = g(x)$$

Quindi α_x è un cammino tra $f(x)$ e $g(x)$ □

corollario Se $X \sim Y$, allora $\pi_0(X)$ e $\pi_0(Y)$ sono in biiezione.

DIMOSTRAZIONE

Se $X \sim Y$, allora $\exists f$ e g t.c. $f \circ g \sim \text{id}_Y$ e $g \circ f \sim \text{id}_X$

Le uso per fare biiezioni tra $\pi_0(X)$ e $\pi_0(Y)$.

Considero $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_0(Y)} : \pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(Y)$

Allo stesso modo $g_* \circ f_* = \text{id}_{\pi_0(X)}$

Quindi f_* e g_* sono biiezioni. □

Oss Il numero di componenti cpa è invariante per omotopia.

Retratti e retratti per deformazione

DEF. Sia $Y \subseteq X$ sottospazio.

Una **retrazione** da X in Y è una funzione $r: X \rightarrow Y$ continua t.c. $r(y) = y \quad \forall y \in Y$

Equivalentemente: $r \circ i = \text{id}_Y$ con $i: Y \hookrightarrow X$

Se esiste una retrazione $r: X \rightarrow Y$ allora Y è **retrato** di X .

esempio

(1) Sia $x_0 \in X$

la funzione $r: X \rightarrow \{x_0\}$ costante è una retrazione

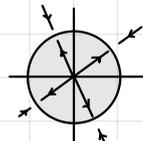
Quindi ogni punto di X è un suo retratto

(2) S^n è un retratto di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

la retrazione è $r: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

Per $n=1$:



(3) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è un retratto di \mathbb{R}

Se per assurdo $\exists r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ retrazione,

avrei $\emptyset \neq r^{-1}((0, +\infty)) \neq \mathbb{R}$ e sia aperto che chiuso in \mathbb{R} \nexists

proposizione Sia Y un retratto di X . Allora

(1) Se X è T_2 , Y è chiuso

(2) Se X è connesso/compatto, allora Y è connesso/compatto

(3) Se X è cpa, Y è cpa

(4) Se Z è un retratto di Y , Z è retratto anche di X .

DIMOSTRAZIONE

(1) $\text{Fix}(f)$, con $f: X \rightarrow X$ continua e $X T_2$, è chiuso, e $Y = \text{Fix}(r)$ dove r è la retrazione.

(2) Segue da $Y = r(X)$ e r continua.

(3) Siano $y_1, y_2 \in Y$ e sia γ un cammino tra y_1 e y_2 in X

Allora $r \circ \gamma$ è un cammino continuo tra y_1 e y_2 in Y .

(4) Se $s: Y \rightarrow Z$ e $r: X \rightarrow Y$ sono le retrazioni di Y su Z e di X su Y ,
 so $r \circ s$ è la retrazione di X su Z

□

DEF. Sia $Y \subseteq X$. Una **retrazione per deformazione** di X su Y è

$H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ continua t.c.

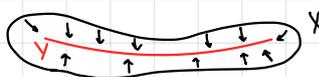
(1) $H(x, 0) = x \quad \forall x \in X$

(2) $H(x, 1) \in Y \quad \forall x \in X$

(3) $H(y, t) = y \quad \forall y \in Y \quad \forall t \in [0, 1]$

da cui $H(x, 1)$ è retrazione di X su Y

Oss H ci dà un'omotopia fra id_X e $H(x, 1)$



DEF. Se esiste una retrazione per deformazione di X su Y , allora

Y si dice **retrato per deformazione** di X .

Oss Y retratto per deformazione di $X \implies Y$ retratto di X

proposizione Sia $Y \subseteq X$ sottospazio retracts per deformazione.
Allora $i: Y \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica.

DIMOSTRAZIONE

Devo trovare un'inversa omotopica di i :

la prendo dalla retrazione per deformazione.

Siccome Y è retracts per deformazione di X

$\exists H: X \times [0,1] \rightarrow Y$ retrazione per deformazione

Definiamo $r(x) = H(x,1)$ e troviamo che:

• $r(x) \in Y \quad \forall x \in X$

• $(r \circ i)(y) = r(y) = H(y,1) = y \implies (r \circ i) = \text{id}_Y$

• $i \circ r \sim \text{id}_X$:

H è continua, $H(x,0) = x \quad \forall x \in X$, $H(x,1) = (i \circ r)(x)$

Quindi H è omotopia tra $i \circ r$ e id_X . \square

corollario Se Y è retracts per deformazione di X , allora $X \sim Y$.

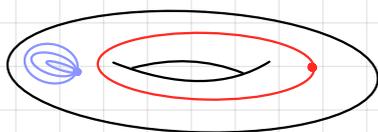
esempio (1) X con $|\pi_0(X)| \geq 2$, sia $x_0 \in X$

$\{x_0\}$ non è retracts per deformazione di X

Infatti, se lo fosse, $X \sim \{x_0\} \implies \pi_0(X)$ e $\pi_0(\{x_0\})$ sono in biiezione \Leftarrow

(2) S^n è retracts per deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Gruppo Fondamentale di X in x_0



Idea: ci sono cammini chiusi che possono essere retratti ad un punto, mentre altri non possono

sia $I = [0,1]$

DEF. Un **cammino** in X tra x_0 e x_1 è una funzione continua

$\alpha: I \rightarrow X$ t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$

Sia $\Omega(X, x_0, x_1) = \{\text{cammini in } X \text{ tra } x_0 \text{ e } x_1\}$ lo spazio dei cammini.

Vogliamo cercare di identificare i cammini a meno di omotopia

Problema: $\alpha_0 \sim \alpha_1 \quad \forall \alpha_0, \alpha_1 \in \Omega(X, x_0, x_1)$

perché $H: I \times I \rightarrow X$ è un'omotopia tra α_0 e α_1

$(s,t) \mapsto \alpha_0((1-t)s)$

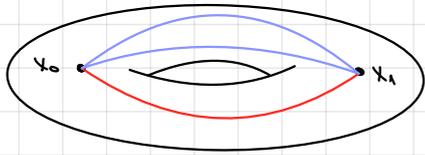
Quindi tutti i cammini sono omotopi tra loro.

Serve quindi una definizione alternativa

DEF Una omotopia di cammini fra $\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega(X, x_0, x_1)$

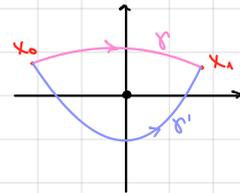
è $H: I \times I \rightarrow X$ continua t.c.

- | | |
|---|--|
| (1) $H(s, 0) = \alpha_0(s) \quad \forall s \in I$ | } H è omotopia tra α_0 e α_1 |
| (2) $H(s, 1) = \alpha_1(s) \quad \forall s \in I$ | |
| (3) $H(0, t) = x_0 \quad \forall t \in I$ | } estremi fissi |
| (4) $H(1, t) = x_1 \quad \forall t \in I$ | |



I cammini in blu saranno omotopi, ma il cammino in rosso non sarà omotopo a quelli in blu.

esempio $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e γ, γ' sono come in figura, γ e γ' sono omotopi come mappe da $[0, 1]$ in X , ma non come cammini.



proposizione L'omotopia di cammini è una relazione d'equivalenza

DIMOSTRAZIONE

Identica alla dimostrazione che l'omotopia è una relazione d'equivalenza. Bisogna solo notare che partendo da omotopie a estremi fissi, in ogni passaggio si ottengono omotopie a estremi fissi. □

Ricordiamo che, se $\alpha \in \Omega(x_0, x_1)$, $\beta \in \Omega(x_1, x_2)$, la giunzione $\alpha * \beta$ è:

$$\alpha * \beta (s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s-1) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\alpha * \beta$ è continuo perché $\{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ è un ricoprimento fondamentale

proposizione Se $\alpha, \alpha' \in \Omega(x_0, x_1)$ e $\beta, \beta' \in \Omega(x_1, x_2)$ con $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, allora $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$

DIMOSTRAZIONE

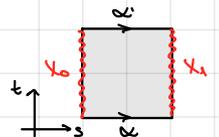
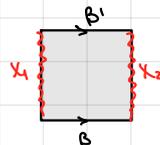
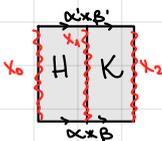
Poiché $\alpha \sim \alpha'$, $\exists H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ t.c. $H_0 = H(\cdot, 0) = \alpha$, $H_1 = H(\cdot, 1) = \alpha'$, e $H(0, t) = x_0 \quad \forall t \in [0, 1]$, $H(1, t) = x_1 \quad \forall t \in [0, 1]$

Analogamente, $\exists K$ omotopia fatta così

Definisco $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$

In formule:

$$T(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(2s-1, t) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



che è continua perché $\{[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1], [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 1]\}$ è un ricoprimento fondamentale di $[0, 1] \times [0, 1]$ □

DEF. Il gruppo fondamentale di X con punto base x_0 è l'insieme

$$\pi_1(X, x_0) = \mathcal{L}(X, x_0, x_0) / \sim$$

con l'operazione $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$

Notiamo per ora che l'operazione è ben definita grazie alla proposizione precedente

Lemma Sia $\alpha \in \mathcal{L}(x_0, x_1)$ e sia $j: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continua con $j(0)=0, j(1)=1$. Allora $\alpha \sim \alpha \circ j$
(cioè la classe di omotopia è invariante per riparametrazioni)

DIMOSTRAZIONE

Basta porre $H(s,t) = \alpha((1-t)s + tj(s))$

H è ben definita, continua e $H_0 = \alpha, H_1 = \alpha \circ j$

e $H(0,t) = \alpha(0), H(1,t) = \alpha(1)$ \square

Idea generale: per costruire omotopie, quando si possono utilizzare combinazioni convesse, facciamo così.

A volte non si può (come in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$)

teorema $(\pi_1(X, x_0), *)$ è un gruppo

DIMOSTRAZIONE

Associatività: dati $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}(x_0, x_0)$, devo vedere

$$([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$$

$$\text{cioè } (\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

Nel cammino $(\alpha * \beta) * \gamma$, percorro α tra 0 e $\frac{1}{4}$, β tra $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$,

γ tra $\frac{1}{2}, 1$; mentre in $\alpha * (\beta * \gamma)$ percorro α tra $0, \frac{1}{2}$,

β tra $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, γ tra $\frac{3}{4}, 1$.

Denque $\alpha * (\beta * \gamma)$ è una riparametrazione di $(\alpha * \beta) * \gamma$,

perciò $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$ per il Lemma

Elemento neutro: sia c_{x_0} il cammino costante in x_0 .

Allora $\forall \alpha \in \mathcal{L}(x_0, x_0)$ i cammini $c_{x_0} * \alpha$ e $\alpha * c_{x_0}$

sono riparametrazioni di α . Ad esempio, se $j: [0,1] \rightarrow [0,1]$,

verifica $j(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2s-1 & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$, allora $\alpha \circ j = c_{x_0} * \alpha$,

per cui $c_{x_0} * \alpha \sim \alpha$.

Analogamente $\alpha * c_{x_0} \sim \alpha$

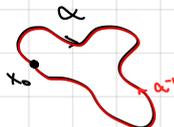
Esistenza dell'inverso: dato $\alpha \in \mathcal{L}(x_0, x_0)$, definisco $\alpha^{-1}: [0,1] \rightarrow X$

$\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s)$. Devo mostrare che $\alpha * \alpha^{-1} \sim c_{x_0}$, $\alpha^{-1} * \alpha \sim c_{x_0}$

(basta $\alpha * \alpha^{-1} \sim c_{x_0}$, poiché $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$)

A poco a poco, richiamo il punto x_0 in cui passo con $\alpha * \alpha^{-1}$ all'istante $t = \frac{1}{2}$ all'indietro, fino al punto x_0 iniziale e finale

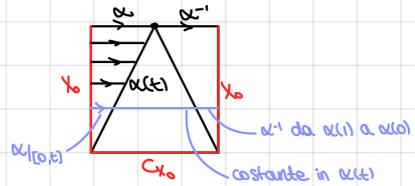
Si può descrivere così: il cammino H_t percorre α tra 0 e $1-t$



(preciso: per $t=0$ percorre tutto α e per $t=1$ è fermo in x_0),
 poi sta fermo per il tempo necessario e poi ripercorre α all'indietro,
 così che $H_0 = \alpha \times \alpha^{-1}$ e $H_1 = c_{x_0}$.
 E' più facile scrivere l'omotopia con $H_0 = c_{x_0}$, $H_1 = \alpha \times \alpha^{-1}$

In formule:

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{se } t \geq 2s \\ \alpha(t) & \text{se } t \leq 2s \text{ e } t \leq 2-2s \\ \alpha(2-2s) & \text{se } t \geq 2-2s \end{cases}$$



Elementi del π_1 come mappe da S^1 in X

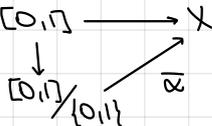
Sia S^1 la circonferenza unitaria in \mathbb{C} (che penso con punto base $1 \in \mathbb{C}$)

Allora c'è una bijezione

$$\Omega(x_0, x_0) \longrightarrow \{f: S^1 \rightarrow X \text{ con } f(1) = x_0\}$$

$$\alpha \longmapsto \tilde{\alpha}$$

Perché $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, ho



α induce $\tilde{\alpha}$ continua.

Ora $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$ ad esempio tramite

$$\varphi: [0,1]/\{0,1\} \rightarrow S^1, \varphi([t]) = e^{2\pi i t}$$

Pongo $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \circ \varphi^{-1}$

La mappa $\alpha \longmapsto \tilde{\alpha}$ è bigettiva in quanto ha inversa

$$\alpha(s) = \tilde{\alpha}(e^{2\pi i s}) \text{ (cioè data } \tilde{\alpha}: S^1 \rightarrow X \text{ con } \tilde{\alpha}(1) = x_0,$$

posso porre $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(e^{2\pi i s})$, ottenendo $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ continua

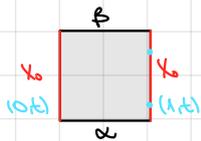
con $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ e queste due costruzioni sono una l'inversa dell'altra.)

Questa mappa induce una ben definita

$$\psi: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow [S^1, X]$$

Infatti, se $[\alpha] = [\beta]$ in $\pi_1(X, x_0)$, esiste un'omotopia $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$
 a estremi fissi tra α e β .

Perché $H(0,t) = H(1,t) = x_0 \forall t \in [0,1]$, questa H passa al quoziente
 rispetto alla relazione \sim che identifica $(0,t)$ con $(1,t) \forall t \in [0,1]$



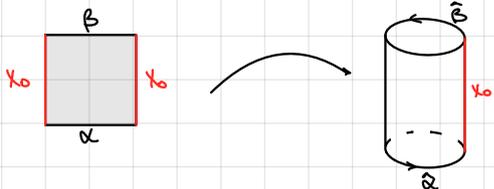
$$\text{definendo } \bar{H}: \frac{[0,1] \times [0,1]}{\sim} \longrightarrow X$$

$$[0,1]_{\sim} \times [0,1] \longrightarrow X$$

$$\text{con } s_1 \sim s_2 \iff s_1, s_2 \in \{0,1\}$$

Per un esercizio svolto (ex. 57), questa identificazione è un omeomorfismo.

Dunque H passa al quoziente definendo $\bar{H}: S^1 \times [0,1] \rightarrow X$
 che per costruzione è un'omotopia tra $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$



Lemma Sia $D = D^2$ disco chiuso in \mathbb{R}^2 o \mathbb{C} , oppure $D = [0,1] \times [0,1]$ e siano α, β archi complementari su ∂D con stessi punto iniziale e finale. Sia $f: X \rightarrow D$ continua. Allora $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$ come cammini.

DIMOSTRAZIONE

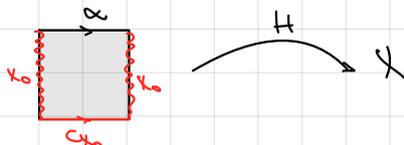
Poiché D è convesso, basta porre $H(s,t) = f((1-t)\alpha(s) + t\beta(s))$ \square

Proposizione (1) $[\alpha] = 1 \iff \tilde{\alpha}: S^1 \rightarrow X$ si estende a una funzione continua su D^2
 (2) Se X è connesso per archi, ψ è surgettiva
 (3) $\psi([\alpha]) = \psi([\beta]) \iff [\alpha]$ e $[\beta]$ sono coniugati in $\pi_1(X, x_0)$

Il punto (3) dice che l'omotopia puntata e l'omotopia libera (senza punti base) non sono la stessa cosa.

DIMOSTRAZIONE

(1) Se α è omotopo a c_{x_0} come cammino, esiste un'omotopia $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ raffigurabile così



Se $J = [0,1] \times [0,1]$ è l'unione dei tre segmenti di bordo che vengono mandati nella costante x_0 , è facile vedere che $[0,1] \times [0,1] / J \cong D^2$ che identifica $[0,1] \times \{1\} \cong [0,1] \times [0,1]$ con $\partial D^2 = S^1$
 $[0,1] \times [0,1] / J \cong \text{circle} \cdot [J]$

L'omotopia H passa al quoziente definendo $\bar{H}: D^2 \rightarrow X$ che estende $\tilde{\alpha}$

Viceversa, se $f: D^2 \rightarrow X$ è un'estensione di $\tilde{\alpha}$ e $g: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1] / J \cong D^2$ è il collasso descritto sopra, $f \circ g$ è un'omotopia a estremi fissi tra α e c_{x_0}

(2) Supponiamo X cpa e sia $\beta: S^1 \rightarrow X$

Corco $\alpha \in \mathcal{R}(X, x_0, x_0)$ t.c. $\tilde{\alpha}$ sia omotopo a β

Sia $x_1 = \beta(1)$. Poiché X è cpa, $\exists \delta \in \mathcal{R}(X, x_0, x_1)$.

Pongo $\alpha = \delta * \bar{\beta} * \delta^{-1}$ dove $\bar{\beta}: [0,1] \rightarrow X$ è tale che $\bar{\beta} = \beta$, cioè $\bar{\beta}(t) = \beta(e^{2\pi i t})$

Dico che $\tilde{\alpha}$ è omotopo a β : infatti, sia $\forall t \in [0,1]$

δ_t il cammino che parte da $\delta(t)$ e arriva in x_1 , cioè $\delta_t(s) = \begin{cases} \delta(t) & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ \delta(s) & \text{se } s \geq t \end{cases}$. In particolare $\delta_0 = \delta, \delta_1 = c_{x_1}$

Sia ora $\gamma_t = \delta_t * \bar{\beta} * \delta_t^{-1}$

Per costruzione $\gamma_0 = \delta_0 * \bar{\beta} * \delta_0^{-1} = \alpha$, $\gamma_1 = \delta_1 * \bar{\beta} * \delta_1^{-1}$, cioè $\gamma_1 = \bar{\beta}$ a meno di riparametrazioni.

Considero l'omotopia

$$H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X \quad H(s,t) = \gamma_t(s)$$

(è facile vedere che è continua)

Ogni γ_t è un cammino chiuso, così che H passa al quoziente definendo $\bar{H}: S^1 \times [0,1] \rightarrow X$ omotopia tra $\hat{\alpha}$ e $\widehat{c_{x_1} * \bar{\beta} * c_{x_1}}$

Poiché $c_{x_1} * \bar{\beta} * c_{x_1}$ è una riparametrazione di $\bar{\beta}$,

$c_{x_1} * \bar{\beta} * c_{x_1}$ è omotopo a estremi fissi a $\bar{\beta}$, per cui

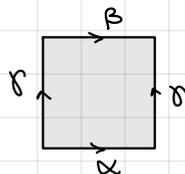
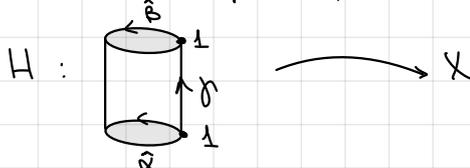
$\widehat{c_{x_1} * \bar{\beta} * c_{x_1}}$ è omotopo a $\hat{\beta} = \bar{\beta}$. Dunque $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$

(3) $\Leftrightarrow \psi([\alpha]) = \psi([\beta]) \Rightarrow \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$, cioè esiste un'omotopia

$$H: S^1 \times [0,1] \rightarrow X \quad \text{con } H_0 = \hat{\alpha}, H_1 = \hat{\beta}$$

$$\text{Sia } K: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X, \quad K(s,t) = H(e^{2\pi i s}, t)$$

Sia $\gamma: [0,1] \rightarrow X$ il cammino percorso dal punto base 1 di S^1 durante l'omotopia H , cioè $\gamma(t) = H(1, t)$



Dunque si può raffigurare K così:

con α, β, γ cammini chiusi che partono e arrivano in x_0

Per un lemma già visto, ne segue che $[\alpha] = [\gamma * \beta * \gamma^{-1}] = [\gamma] * [\beta] * [\gamma^{-1}]$ cioè $[\alpha]$ è coniugato a $[\beta]$

\Leftrightarrow Se $[\alpha]$ è coniugato a $[\beta]$, $\exists [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ t.c. $[\alpha] = [\gamma * \beta * \gamma^{-1}]$, cioè α è omotopo a estremi fissi a $\gamma * \beta * \gamma^{-1}$, da cui $\hat{\alpha}$ è omotopo a $\widehat{\gamma * \beta * \gamma^{-1}}$.

Per concludere, basta vedere che $\widehat{\gamma * \beta * \gamma^{-1}}$ è omotopo a $\hat{\beta}$.

Esattamente come prima, se $\gamma_t(s) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ \gamma(s) & \text{se } s > t \end{cases}$, si mostra che $\widehat{\gamma * \beta * \gamma^{-1}}$ è omotopo a $\hat{\beta}$ interpolando questi cammini con $\widehat{\gamma_t * \beta * \gamma_t^{-1}}$.



Perciò, per definire π_1 , il punto base è importante:

$[S^1, X]$ è in bijezione naturale (almeno quando X è cpa) con le classi di coniugio di $\pi_1(X, x_0)$, cui non è possibile dare una sensata struttura di gruppo.

π_1 come funtore

Possiamo pensare a π_1 come ad un funtore

$$\{\text{spazi topologici puntati}\} \longrightarrow \{\text{gruppi}\}$$

Gli oggetti della categoria $\{\text{sp. top. puntati}\}$ sono coppie

(X, x_0) con X topologico, $x_0 \in X$, e le frecce sono

$$f: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \text{ continua con } f(x_0) = y_0$$

Per ora, a ogni oggetto (X, x_0) abbiamo associato l'oggetto

$$\pi_1(X, x_0) \text{ (che è un gruppo)}$$

Dobbiamo ora associare a ogni $f: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continua con $f(x_0) = y_0$

una $f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ omomorfismo di gruppi

$$\text{Si pone } \forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \quad f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

- f_* è ben definita perché, se $\alpha \sim \beta$, $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$
(se H è un'omotopia a estremi fissi tra α e β , $f \circ H$ è un'omotopia a estremi fissi tra $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$)

- f_* è un omomorfismo, perché

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta), \text{ per cui}$$

$$f_*([\alpha] * [\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = \\ = [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) * f_*([\beta])$$

Per dire che siamo in presenza di un funtore, bisogna anche mostrare che:

$$(1) \text{ id}: (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0) \text{ è l'identità,}$$

$$\text{id}_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \text{ è l'identità}$$

$$(2) \text{ Date } f: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0), g: (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$$

$$\text{si ha } (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

Anche questa verifica è banale:

$$(f \circ g)_*([\alpha]) = [(f \circ g) \circ \alpha] = [f \circ (g \circ \alpha)] = f_*[g \circ \alpha] = f_*(g_*([\alpha]))$$

corollario Se $f: X \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora
 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$

DIMOSTRAZIONE

Per ipotesi, $f^{-1}: (Y, f(x_0)) \longrightarrow (X, x_0)$ esiste ed è continua,

$$\text{e si ha } f_* \circ f_*^{-1} = (f \circ f^{-1})_* = \text{id}_* = \text{id}_{\pi_1(Y, f(x_0))}$$

$$f_*^{-1} \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = \text{id}_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

per cui gli omomorfismi f_* , f_*^{-1} sono uno l'inverso dell'altro \square

proposizione Siano $f, g: X \rightarrow Y$ t.c. $f(x_0) = g(x_0) = y_0$
 che siano omotope tramite un'omotopia portata,
 cioè tramite $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$ t.c. $H_0 = f, H_1 = g$
 $H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \in [0,1]$
 Allora $f_* = g_*$

DIMOSTRAZIONE

Basta osservare che $\forall \alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$,
 $f \circ \alpha$ è omotopo ad estremi fissi a $g \circ \alpha$ tramite
 l'omotopia $K: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X \quad K(s,t) = H(\alpha(s), t)$
 Per costruzione, $K_0 = f \circ \alpha, K_1 = g \circ \alpha$ e
 $K(0,t) = K(1,t) = y_0 \quad \forall t$ perché $H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t$ \square

dipendenza dal punto base

Sia $p \in \Omega(X, x_0, x_1)$. Costruiamo un isomorfismo di gruppi

$$p_{\#}: \pi_1(X, x_1) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \quad (\text{che dipenderà da } p)$$

Si pone $p_{\#}([\alpha]) = [p * \alpha * p^{-1}]$

- Buona definizione: se $\alpha \sim \beta$, abbiamo visto in un lemma che
 $p * \alpha \sim p * \beta$, e quindi di nuovo $p * \alpha * p^{-1} \sim p * \beta * p^{-1}$,
 da cui la buona definizione.
- Omomorfismo di gruppi: qui si usano sia il lemma sulla giunzione,
 sia quello sulle riparametrizzazioni (che implica che se c è costante,
 $c * p \sim p$): infatti $p_{\#}([\alpha]) \cdot p_{\#}([\beta]) = [p * \alpha * p^{-1}] \cdot [p * \beta * p^{-1}] =$
 $= [p * \alpha * \underbrace{p^{-1} * p}_{\text{loop in } x_1} * \beta * p^{-1}]$
 Ma $p * \alpha * (p^{-1} * p) * \beta * p^{-1} \sim p * \alpha * c_{x_1} * \beta * p^{-1} \sim p * \alpha * \beta * p^{-1}$
 la cui classe di omotopia è $p_{\#}([\alpha * \beta])$
- Isomorfismo di gruppi: l'inversa è data da $(p^{-1})_{\#}$.
 Già sappiamo che $(p_{\#})^{-1}$ è un ben definito omomorfismo.
 Inoltre $(p^{-1})_{\#}(p_{\#}([\alpha])) = (p^{-1})_{\#}([p * \alpha * p^{-1}]) = [p^{-1} * p * \alpha * p^{-1} * p] =$
 $= [c_{x_1} * \alpha * c_{x_1}] = [\alpha]$, per cui
 $p_{\#}$ e $(p^{-1})_{\#}$ sono uno l'inversa dell'altra. \square

corollario Se X è connesso per archi, il tipo di isomorfismo
 di $\pi_1(X, x_0)$ non dipende da x_0

def. X si dice semplicemente connesso se è connesso per archi
 e $\pi_1(X) = \{e\}$

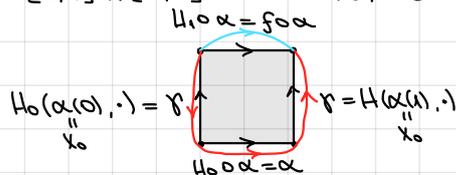
Per provare che spazi omotopicamente equivalenti (non necessariamente tramite omotopie puntate) hanno π_1 isomorfo, cominciamo con la seguente

proposizione Sia $f: X \rightarrow X$ omotopa all'identità.
Allora $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, f(x_0))$ è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE

Sia $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ un'omotopia fra Id e f , cioè $H_0 = \text{Id}$, $H_1 = f$ e sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ il cammino percorso da x_0 durante l'omotopia, cioè $\gamma(t) = H(x_0, t)$. Perciò $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = f(x_0)$.

Sia $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$. Applicando l'omotopia H ad α , otteniamo la mappa $K: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, $K(s, t) = H(\alpha(s), t)$ descritta da



Per un Lemma già visto, i cammini blu e rosso sono omotopi a estremi fissi, per cui $f \circ \alpha \sim \gamma^{-1} * \alpha * \gamma$, cioè $[f \circ \alpha] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$ in $\pi_1(X, f(x_0))$, cioè $f_*(\alpha) = \gamma\#^{-1}([\alpha])$. Poiché questa relazione vale $\forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, $f_* = \gamma\#^{-1}$ è un isomorfismo per quanto già visto. □

corollario Sia $f: X \rightarrow Y$ equivalenza omotopica. Allora $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ è un isomorfismo.
Dunque, se X è connesso per archi, $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$

DIMOSTRAZIONE

Sia g un'inversa omotopica di f , cioè $f \circ g \sim \text{Id}_Y$, $g \circ f \sim \text{Id}_X$.

Per quanto visto, se $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$,

$g_*: \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$, allora $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$ è un isomorfismo, perché $g \circ f \sim \text{Id}_X$. Ne segue che f_* è iniettiva.

Ritornando lo stesso discorso con g_* , poiché $f \circ g \sim \text{Id}_Y$, ottengo che anche g_* è iniettiva. Dunque $g_* \circ f_*$ è bigettiva, e sia f_* sia g_* sono iniettive. Da ciò segue che sono bigettive. □

corollario Se X è contrattile, allora è semplicemente connesso.

corollario $\pi_1(\mathbb{R}^2, \{0\}) \cong \pi_1(S^1)$

(S^1 è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, perché ne è un retratto per deformazione.)

Per mostrare che esistono spazi non semplicemente connessi, ci servirà la teoria dei rivestimenti, con la quale mostreremo ad esempio il risultato fondamentale $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Teoria dei rivestimenti

def. $f: X \rightarrow Y$ è un **omeomorfismo locale** se $\forall p \in X$
 $\exists U$ aperto in X t.c. $p \in U$ e $f|_U: U \rightarrow f(U)$
 è un omeomorfismo su un aperto (cioè $f(U)$ è aperto)

esempio (1) Se U è aperto in X , l'inclusione $i: U \hookrightarrow X$ è un omeo locale
 (2) $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ è un omeo locale (lo vedremo tra poco, quando dimostreremo che è addirittura un rivestimento)
 (3) $X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\} / \sim$, $(x, \varepsilon) \sim (x, \varepsilon')$ \iff sono uguali o $x = y \neq 0$
 _____:

(già visto come esempio di spazio localmente omeomorfo a \mathbb{R} ma non T_2)
 Sia $\pi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi([x, \varepsilon]) = x$
 Allora π è omeomorfismo locale: infatti, se $U = X \setminus \{[0, -1]\}$, $V = X \setminus \{[0, 1]\}$
 sono aperti di X (X è T_1) e $\pi|_U: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi|_V: V \rightarrow \mathbb{R}$
 sono omeomorfismi. Poiché $U \cup V = X$, π è un omeo locale

proposizione Sia $f: X \rightarrow Y$ un omeomorfismo locale.
 Allora f è una mappa aperta.

DIMOSTRAZIONE

Per definizione di omeomorfismo locale, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, dove
 U_i è aperto in X $\forall i \in I$ e $f|_{U_i}: U_i \rightarrow f(U_i)$ è un omeo, con
 $f(U_i)$ aperto.

Ora sia $\Omega \subseteq X$ aperto. Allora

$$f(\Omega) = f(\Omega \cap \bigcup_{i \in I} U_i) = f(\bigcup_{i \in I} \Omega \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} f(\Omega \cap U_i)$$

Ora, $\Omega \cap U_i$ è aperto in U_i e $f: U_i \rightarrow f(U_i)$ è omeo,
 per cui $f(\Omega \cap U_i)$ è aperto in $f(U_i)$.

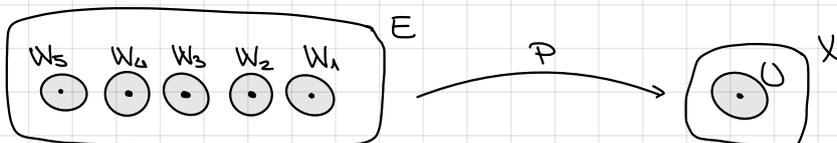
Poiché $f(U_i)$ è aperto in Y , $f(\Omega \cap U_i)$ è aperto anche in Y .

Donque $f(\Omega) = \bigcup_{i \in I} f(\Omega \cap U_i)$ è aperto in quanto unione di aperti. \square

def. Una funzione continua $p: E \rightarrow X$ si dice **rivestimento** se

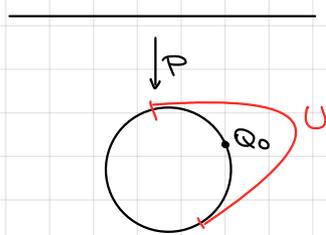
(1) X è connesso

(2) $\forall p \in X$ $\exists U \ni p$ aperto con $p \in U$ t.c. $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$,
 dove W_i è aperto $\forall i \in I$ e $p|_{W_i}: W_i \rightarrow U$ è un omeomorfismo $\forall i \in I$
 Un tale U si dice **ben rivestito** (o banalizzante).



esempio (fondamentale)

da funzione $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ è un rivestimento



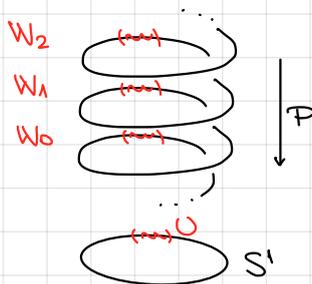
Sia $Q_0 = e^{2\pi i t_0} \in S^1$. Pongo $U = \{e^{2\pi i t} \mid t_0 - \frac{1}{4} < t < t_0 + \frac{1}{4}\}$

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (t_0 - \frac{1}{4} + n, t_0 + \frac{1}{4} + n)$$



Donque, posto $W_n = (t_0 - \frac{1}{4} + n, t_0 + \frac{1}{4} + n)$, basta osservare che i W_n sono disgiunti e aperti e $p|_{W_n}: W_n \rightarrow U$ è un omeomorfismo, il che è molto facile.

Un altro modo di disegnarre questo rivestimento è collocando \mathbb{R} sopra S^1 come un'elica.



proposizione Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento.
Allora p è omeomorfismo locale.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\tilde{x} \in E$ e sia $x = p(\tilde{x})$.

Siccome p è rivestimento, $\exists U \ni x$ aperto banalizzante di x

$$\Rightarrow p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i, \text{ con } W_i \text{ aperto di } E \text{ e } p|_{W_i} \text{ omeomorfismo su un aperto}$$

Siccome $x = p(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in p^{-1}(U) \Rightarrow \exists! i_0 \in I$ t.c. $\tilde{x} \in W_{i_0}$

Scelgo $V = W_{i_0}$ che è aperto e t.c. $p|_{W_{i_0}}$ è omeomorfismo

e $p|_{W_{i_0}}(W_{i_0})$ è aperto in X

Quindi p è omeomorfismo locale. □

DEF. Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, sia $x \in X$.
L'insieme $p^{-1}(x)$ si dice fibra di x .

teorema Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, siano $x, y \in X$.

Allora $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$

In altre parole, la cardinalità delle fibre di un rivestimento è costante.

DIMOSTRAZIONE

Sia $x_0 \in X$. Definisco $\Omega = \{x \in X : |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|\} \subseteq X$

Mostro che Ω è aperto e chiuso in X connesso.

Siccome $x_0 \in \Omega \neq \emptyset$, segue $\Omega = X$, che è la tesi.

• Ω è aperto:

sia $x \in \Omega$. Siccome $x \in X$, $\exists U \subseteq X$ aperto ben rivestito, ovvero

$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$, $p|_{W_i}$ omeomorfismo su U

In particolare, $p|_{W_i}$ è biezione. Quindi $|p|_{W_i}^{-1}(x)| = 1 \quad \forall x \in U$

Quindi $|p|_{W_i}^{-1}(x) \cap W_i| = 1 \quad \forall x \in U \quad \forall i \in I$.

Quindi, siccome i W_i sono disgiunti, $p^{-1}(x)$ è in biezione con I

$\Rightarrow p^{-1}(x_0)$ è in biezione con I , ma $x \in \Omega \Rightarrow |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)| = |I| \quad \forall x \in U$

Quindi $U \subseteq \Omega$. Quindi ogni $x \in \Omega$ ha un intorno aperto $\Rightarrow \Omega$ aperto

• Ω è chiuso: mostro che Ω^c è aperto

sia $x \in \Omega^c \Rightarrow |p^{-1}(x)| \neq |p^{-1}(x_0)|$

Per il ragionamento precedente, esiste $U \subseteq X$ aperto t.c. $|p^{-1}(z)| = |p^{-1}(x)| \quad \forall z \in U$

Quindi $|p^{-1}(z)| \neq |p^{-1}(x_0)| \quad \forall z \in U$

Quindi $U \subseteq \Omega^c$, perciò ogni $x \in \Omega^c$ ha un intorno aperto $\Rightarrow \Omega^c$ aperto \square

Abbiamo quindi che la seguente quantità è ben definita.

DEF. Il grado di un rivestimento è la cardinalità di una qualsiasi sua fibra.

esempio Sia $E = \bigsqcup_{i \in \{1, \dots, d\}} X$. Allora $p: E \rightarrow X$ è rivestimento di grado d

Sia $E = S^n$, $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ Allora $\pi: S^n \rightarrow S^n/\sim \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
è un rivestimento di grado 2

corollario Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, con $E \neq \emptyset$.

Allora p è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE

Osservo che p è surgettiva $\iff |p^{-1}(x)| \geq 1 \quad \forall x \in X$

Sia $x \in E \neq \emptyset$ e sia $x = p(\tilde{x})$. Allora $|p^{-1}(x)| \geq 1$ perché $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$

Per il teorema precedente $|p^{-1}(x)| \geq 1 \quad \forall x \in X$. Quindi p è surgettiva \square

esempio (omeomorfismo locale surgettivo che non è un rivestimento)

Sia $E = \mathbb{R} \times (-1, 1] / \sim$ con $(x, \varepsilon) \sim (x', \varepsilon') \iff (x, \varepsilon) = (x', \varepsilon') \vee x = x' \neq 0$

Sia $X = \mathbb{R}$, sia $p: E \rightarrow X : p([x, \varepsilon]) = x$

• p è omeomorfismo locale

• p non è rivestimento: $p^{-1}(0) = \{[0, 1], [0, -1]\} \Rightarrow |p^{-1}(0)| = 2$

ma $p^{-1}(x) = \{[x, 1]\} \Rightarrow |p^{-1}(x)| = 1 \quad \forall x \neq 0$

teorema

Sia $G \curvearrowright X$ un'azione propriamente discontinua
 tale che X/G è connesso.
 Allora $\pi: X \rightarrow X/G$ è rivestimento

DIMOSTRAZIONE

Sia $x \in X/G$, sia $\tilde{x} \in X$ t.c. $\pi(\tilde{x}) = x$

Si come $G \curvearrowright X$ è propriamente discontinua, $\exists V \subset X$ aperto, $\tilde{x} \in V$,
 t.c. $g \cdot V \cap V = \emptyset \quad \forall g \neq e$

Sia $U = \pi(V)$: U è aperto di X/G perché le proiezioni al quoziente per
 azioni di gruppo sono mappe aperte

Mostro che U è ben rivestito.

• $\pi^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti: $\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$
 (In generale, l'unione non è disgiunta)

Ogni $g \cdot V$ è aperto, perché la mappa $l_g: X \rightarrow X$, $l_g(x) = g \cdot x$
 è omeomorfismo e $g \cdot V = l_g(V)$, quindi aperto

Supponiamo $g \cdot V \cap g' \cdot V \neq \emptyset$, $g \neq g' \iff g^{-1}(g \cdot V \cap g' \cdot V) \neq \emptyset$

$\iff V \cap g^{-1}g' \cdot V \neq \emptyset$ ma $G \curvearrowright X$ è propriamente discontinua,
 quindi $g^{-1}g' = e \implies g = g'$ ∇

Quindi $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{g \in G} g \cdot V$

• $\pi|_{g \cdot V}$ è omeomorfismo su U

$\pi|_{g \cdot V}$ è continua e aperta, perché restrizione ad un aperto di π , che è continua.

Mostro che $\pi|_{g \cdot V}$ è biiezione.

- iniettiva: siano $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in g \cdot V$. Supponiamo $\pi|_{g \cdot V}(\tilde{x}_1) = \pi|_{g \cdot V}(\tilde{x}_2)$

Per definizione di π , $\exists h \in G$ t.c. $h \cdot \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$

$h \cdot g \cdot V = h \cdot (g \cdot V) \ni h \cdot \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 \in g \cdot V$, ma siccome i $g \cdot V$ sono disgiunti

$h \cdot g = g \implies h = e \implies \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 \implies \pi|_{g \cdot V}$ iniettiva

- surgettiva: siccome $U = \pi(V) \implies \forall x \in U \exists \tilde{x} \in V$ t.c. $x = \pi(\tilde{x})$

Per definizione di π ho che $\pi(g \cdot \tilde{x}) = \pi(\tilde{x}) = x \quad \forall g \in G$

Quindi $g \cdot \tilde{x} \in g \cdot V$ è preimmagine di x per $\pi|_{g \cdot V} \quad \forall x \in U$

Quindi $\pi|_{g \cdot V}$ è surgettiva. □

esempio $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n \quad g \cdot x = \begin{cases} x & \text{se } g = e \\ -x & \text{se } g \neq e \end{cases}$ è un'azione propriamente discontinua

Quindi $\pi: S^n \rightarrow S^n/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è rivestimento

esempio $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ per traslazione è un'azione propriamente discontinua

Quindi $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ è un rivestimento

Oss Se p è un rivestimento $p: X \rightarrow X/G$ con $X \curvearrowright G$ propriamente discontinua
 allora $|p^{-1}(x)| = \left| \bigsqcup_{g \in G} g \cdot x \right| = |G|$
 Il grado di p è l'ordine di G

sollevamenti di Funzioni, cammini e omotopie

Idea: Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento. Vorremmo, data una funzione $f: Y \rightarrow X$ continua, ottenere $\tilde{f}: Y \rightarrow E$ continua, in modo che il diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \tilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Def: Un sollevamento di $f: Y \rightarrow X$ continua per il rivestimento $p: E \rightarrow X$ è una funzione continua $\tilde{f}: Y \rightarrow E$ t.c. $f = p \circ \tilde{f}$

teorema Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, Y connesso e $f: Y \rightarrow X$ continua. Siano $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0) \in X$. Sia $\tilde{x}_0 \in E$: $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Allora esiste al più un sollevamento $\tilde{f}: Y \rightarrow E$ t.c. $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Ovvvero, se \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 sono sollevamenti di f t.c. $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$, allora $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$

DIMOSTRAZIONE

Siano $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Y \rightarrow E$ sollevamenti di f con $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0) = \tilde{x}_0$

Sia $\Omega = \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$: $\Omega \neq \emptyset$ perché $y_0 \in \Omega$

Se $\Omega = Y$, segue la tesi.

Mostriamo che Ω è sia aperto sia chiuso in Y connesso.

• Ω è aperto: sia $y \in \Omega$, quindi $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) = \tilde{x}$. Sia $x = p(\tilde{x})$

Perché p è rivestimento, $\exists U$ aperto ben rivestito con $x \in U$

Quindi $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$, W_i aperto. Siccome $\tilde{x} \in p^{-1}(U)$

$\exists i_0 \in I$ t.c. $\tilde{x} \in W_{i_0}$. Considero $V = \tilde{f}_1^{-1}(W_{i_0}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(W_{i_0})$ aperto in Y

Chiaramente $\tilde{f}_1(V), \tilde{f}_2(V) \subseteq W_{i_0}$ e $y \in V$

p rivestimento $\Rightarrow p|_{W_{i_0}}$ iniettiva. Sia $z \in V$

Calcolo $p|_{W_{i_0}}(\tilde{f}_1(z)) = f(z) = p|_{W_{i_0}}(\tilde{f}_2(z)) \Rightarrow \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \quad \forall z \in V$

$\Rightarrow V \subseteq \Omega \Rightarrow \Omega$ aperto

• Ω è chiuso: mostriamo che Ω^c è aperto.

Sia $y \in \Omega^c \Rightarrow \tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$

Siccome $p(\tilde{f}_1(y)) = f(y) = p(\tilde{f}_2(y)) =: x$, ovvero $\tilde{f}_1(y), \tilde{f}_2(y) \in p^{-1}(x)$

Sia U aperto ben rivestito con $x \in U$. Quindi $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$, W_i aperto

Se fosse $\tilde{f}_1(y), \tilde{f}_2(y)$ siamo in uno stesso W_{i_0} , $p|_{W_{i_0}}$ è iniettiva

quindi $p|_{W_{i_0}}(\tilde{f}_1(y)) = x = p|_{W_{i_0}}(\tilde{f}_2(y)) \Rightarrow \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) \quad \nabla$

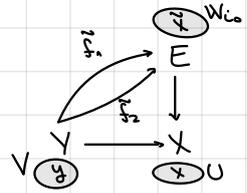
Quindi $\tilde{f}_1(y) \in W_{i_1}, \tilde{f}_2(y) \in W_{i_2}, i_1 \neq i_2$, ma $W_{i_1} \cap W_{i_2} = \emptyset$

Sia $V = \tilde{f}_1^{-1}(W_{i_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(W_{i_2})$, aperto di Y

Per ogni $z \in V$, $\tilde{f}_1(z)$ e $\tilde{f}_2(z)$ sono in insiemi disgiunti $\Rightarrow \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)$

$\Rightarrow V \subseteq \Omega^c \Rightarrow \Omega^c$ aperto

□



**Teorema:
sollevamento
di cammini**

Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento
 Sia $\gamma: [0,1] \rightarrow X$ un cammino, con $\gamma(0) = x_0$
 Sia $\tilde{x}_0 \in E$, con $p(\tilde{x}_0) = x_0$
 Allora esiste un unico sollevamento $\tilde{\gamma}$ di γ , con $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$.

DIMOSTRAZIONE

Si come $[0,1]$ è connesso, l'unicità segue dal teorema precedente
 p rivestimento $\Rightarrow \forall x \in X$ è contenuto in un aperto ben rivestito
 $\Rightarrow \exists \mathcal{U}$ ricoprimento aperto di X in cui ogni $U \in \mathcal{U}$ è ben rivestito
 $\Rightarrow \gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \{ \gamma^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U} \}$ è ricoprimento aperto di $[0,1]$
 Si come $[0,1]$ è metrico compatto, esiste un numero di Lebesgue di $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$
 ovvero $\exists \varepsilon > 0 \forall t \in [0,1] \exists B(t, \varepsilon) \subseteq V$ per qualche $V \in \gamma^{-1}(\mathcal{U})$
 Scegliamo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < \varepsilon$



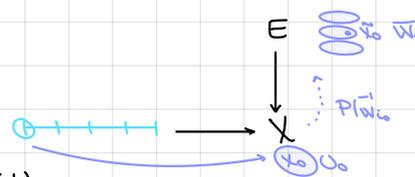
Questa palla è contenuta in $V \in \gamma^{-1}(\mathcal{U})$
 e contiene tutto $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$

Quindi $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \subseteq V_k \in \gamma^{-1}(\mathcal{U}) \quad \forall k=0, \dots, n-1$
 $\Rightarrow \gamma([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]) \subseteq U_k \in \mathcal{U} \quad \forall k=0, \dots, n-1$
 e per definizione di \mathcal{U} , U_k è ben rivestito

IDEA: definisco $\tilde{\gamma}$ su ciascun $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$

Inizio da $[0, \frac{1}{n}]$: si come $\gamma([0, \frac{1}{n}]) \subseteq U_0$ ben rivestito $\Rightarrow p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$, W_i aperto
 $\gamma(0) = x_0 \in U_0 \Rightarrow \exists ! \tilde{x}_0$ t.c. $\tilde{x}_0 \in W_{i_0} =: \overline{W}_0$

Definisco $\tilde{\gamma}|_{[0, \frac{1}{n}]} = P|_{\overline{W}_0}^{-1} \circ \gamma|_{[0, \frac{1}{n}]}$



Consideriamo $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$: vale che $\gamma([\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]) \subseteq U_1$,
 con U_1 ben rivestito $\Rightarrow p^{-1}(U_1) = \bigsqcup_{i \in I} W_i$. Consideriamo $\tilde{x}_1 = \tilde{\gamma}|_{[0, \frac{1}{n}]}(\frac{1}{n})$
 Sia \overline{W}_1 l'unico W_i t.c. $\tilde{x}_1 \in \overline{W}_1$.

Definiamo $\tilde{\gamma}|_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]} = P|_{\overline{W}_1}^{-1} \circ \gamma|_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$

Iteriamo il ragionamento per tutti i $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $k=0, \dots, n-1$

Si come ciascun $\tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$ è continuo, i $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ formano un ricoprimento chiuso finito,
 quindi fondamentale, e $\tilde{\gamma}|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(\frac{k+1}{n}) = \tilde{\gamma}|_{[\frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}]}(\frac{k+1}{n})$,
 i cammini si incollano a una funzione continua su $[0,1]$, che è sollevamento. \square

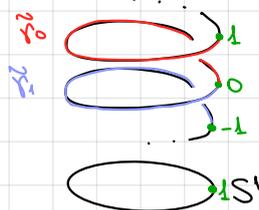
NOTAZIONE Dato $p: E \rightarrow X$ rivestimento, $\gamma: [0,1] \rightarrow X$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(\gamma(0))$
 Chiamo $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ l'unico sollevamento di γ con $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$

esempio

Se non fisso \tilde{x}_0 , il sollevamento non è unico

Sia $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ e $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$

Ma $\tilde{\gamma}_m(t) = t + m$, $\tilde{\gamma}_m: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sono sollevamenti di γ , $\forall m \in \mathbb{Z}$



**Teorema:
sollevamento
di omotopie**

Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento.

Sia $f: Y \rightarrow X$ e sia $\tilde{f}: Y \rightarrow E$ sollevamento di f .

Sia $H: Y \times [0,1] \rightarrow X$ omotopia con $H(\cdot, 0) = f$

Allora esiste un sollevamento

$$\tilde{H}: Y \times [0,1] \rightarrow E \quad \text{t.c.} \quad \tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}$$

DIMOSTRAZIONE

Costruisco \tilde{H}

• Osservo che per $y \in Y$ fissato, $H(y, \cdot)$ è un cammino su X

$$\gamma_y: [0,1] \rightarrow X, \quad \gamma_y(t) = H(y, t)$$

• Siccome $p(\tilde{f}(y)) = f(y) = \gamma_y(0)$, ho che $\tilde{f}(y) \in p^{-1}(\gamma_y(0))$

• Per il teorema di esistenza di sollevamenti di cammini

$$\exists! \tilde{\gamma}_y: [0,1] \rightarrow E \text{ sollevamento di } \gamma_y, \text{ con } \tilde{\gamma}_y(0) = \tilde{f}(y)$$

• Definisco $\tilde{H}: Y \times [0,1] \rightarrow E, \quad \tilde{H}(y, t) = \tilde{\gamma}_y(t)$

• Verifico che

$$(p \circ \tilde{H})(y, t) = p(\tilde{H}(y, t)) = p(\tilde{\gamma}_y(t)) = \gamma_y(t) = H(y, t)$$

• Mostro che \tilde{H} è continua: lo faccio mostrando che $\forall (y_0, t) \in Y \times [0,1]$ esiste un intorno su cui la restrizione di \tilde{H} è continua.

Punto 1 H continua $\Rightarrow \forall t \in [0,1] \exists$ intorno aperto $U_t \times V_t \ni (y_0, t)$ t.c.

$H(U_t \times V_t)$ è contenuto in un aperto ben rivestito.

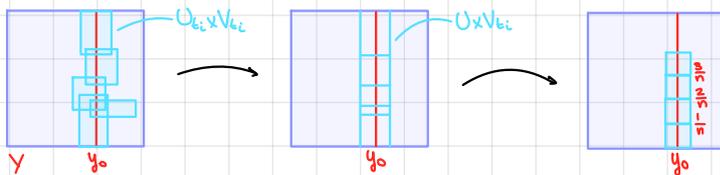
Infatti, sia $z = H(y_0, t) \in X$. Sia Z aperto ben rivestito di z .

Quindi $H^{-1}(Z)$ è aperto di $Y \times [0,1]$ contenente (y_0, t)

$\Rightarrow \exists U_t \times V_t$ aperto in $H^{-1}(Z)$ contenente (y_0, t) .

Quindi $\{U_t \times V_t : t \in [0,1]\}$ è famiglia di aperti di $Y \times [0,1]$ t.c.

$\{y_0\} \times [0,1] \subseteq \bigcup_t U_t \times V_t$ e $H(U_t \times V_t)$ è un aperto ben rivestito.



Siccome $\{y_0\} \times [0,1]$ è compatto, esiste un sottoricoprimento finito

di $\{y_0\} \times [0,1] : \{U_{t_i} \times V_{t_i} : i=1, \dots, n\}$

Sia $U = \bigcap_{i=1}^n U_{t_i}$: ho ancora $\{y_0\} \times [0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n U \times V_{t_i}$

Passo 2 $\exists n \in \mathbb{N} : H(U \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])$ è contenuto in un aperto ben rivestito $Z_k, k=0, \dots, n-1$

Infatti $\{V_{t_i} : i=1, \dots, n\}$ è ricoprimento di $[0,1]$ metrico e compatto

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [0,1] B(t, \varepsilon) \subseteq V_{t_i}$ per qualche V_{t_i}

Sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < \varepsilon$



Quindi $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \subseteq V_{t_i} \quad \forall k$, per qualche V_{t_i}

Quindi $H(U \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]) \subseteq H(U \times V_{t_i})$ che è contenuto in un aperto ben rivestito Z_k

Punto 3 Mostro che $\tilde{H}|_{U_x[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} = S_k \circ H|_{U_x[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$ con S_k continua.

Infatti: Z_k ben rivestito $\Rightarrow P^{-1}(Z_k) = \bigcup_{i \in I} W_i$

$\exists ! W_j$ t.c. $\tilde{y}_{y_0}(\frac{k}{n}) \in W_j$, che chiamo \tilde{W}_k

$\tilde{y}_{y_0}(\frac{k}{n}) \in P^{-1}(Z_k)$ perché $(y_0, \frac{k}{n}) \in U_x[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, quindi $\tilde{y}_{y_0}(\frac{k}{n}) = H(y_0, \frac{k}{n}) \in Z_k$

Sia $S_k = P|_{\tilde{W}_k}^{-1}$

Mostro che $\tilde{H}|_{U_x[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} = P|_{\tilde{W}_k}^{-1} \circ H|_{U_x[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$ facendo vedere che coincidono in ogni punto

$k=0$: fisso " $t=0$ ". $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}(\cdot)$, che è continua.

Osservo che $\tilde{H}|_{U_x[0, \frac{1}{n}]}(\cdot, 0)$ e $(P|_{\tilde{W}_0}^{-1} \circ H|_{U_x[0, \frac{1}{n}]}) (\cdot, 0)$ sono entrambe continue ($Y \rightarrow E$)

e soddisfanno la proprietà di sollevamento di $H|_{U_x[0, \frac{1}{n}]}(\cdot, 0)$

\Rightarrow sono entrambi sollevamenti di $H|_{U_x[0, \frac{1}{n}]}$ e

$\tilde{H}|_{U_x[0, \frac{1}{n}]}(y_0, 0) = \tilde{y}_{y_0}(0)$, $(P|_{\tilde{W}_0}^{-1} \circ H|_{U_x[0, \frac{1}{n}]})(y_0, 0) = P|_{\tilde{W}_0}^{-1}(\tilde{y}_{y_0}(0)) = \tilde{y}_{y_0}(0)$

\Rightarrow (sto asserendo l'unicità) per unicità del sollevamento,

le due funzioni coincidono (" $t=0$ " fissato)

Fisso y : considero $\tilde{H}|_{U_x[0, \frac{1}{n}]}(y, \cdot)$ e $(P|_{\tilde{W}_0}^{-1} \circ H|_{U_x[0, \frac{1}{n}]})(y, \cdot)$ (continue su E)

Osservo che sono entrambi sollevamenti di \tilde{f}_y , che coincidono in $t=0$

(ho appena mostrato che per $t=0$ le funzioni coincidono $\forall y \in U$)

Per unicità del sollevamento

$$\tilde{H}|_{U_x[0, \frac{1}{n}]}(y, t) = (P|_{\tilde{W}_0}^{-1} \circ H|_{U_x[0, \frac{1}{n}]})(y, t)$$

Quindi $\tilde{H}|_{U_x[0, \frac{1}{n}]} \equiv P|_{\tilde{W}_0}^{-1} \circ H|_{U_x[0, \frac{1}{n}]}$

Per $k > 1$ funziona allo stesso modo:

• fisso $t = \frac{k}{n}$, concludo che $\tilde{H}|_{U_x[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(\cdot, \frac{k}{n}) = (P|_{\tilde{W}_k}^{-1} \circ H|_{U_x[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]})(\cdot, \frac{k}{n})$

• fisso $y \in U$, concludo che coincidono in ogni punto.

Quindi $\tilde{H}|_{U_x[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}$ è continua.

Quindi \tilde{H} è continua se ristretta a un ricoprimento chiuso e

finito (quindi fondamentale) $\Rightarrow \tilde{H}$ continua su $U \times [0, 1]$ □

Mostriamo ora che anche le omotopie di cammini si sollevano

teorema

Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento

Sia $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ omotopia di cammini

tra $\alpha(s) := H(s,0)$ e $\beta(s) := H(s,1)$, con $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x_1)$

Sia $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

Allora esista una unica omotopia di cammini

$\tilde{H}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow E$ con $\tilde{H}(s,0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(s)$, $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}(s)$

DIMOSTRAZIONE

H omotopia. Per il teorema di sollevamento $\exists! \tilde{H}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow E$

t.c. $\tilde{H}(s,0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(s)$

Mostro che \tilde{H} è omotopia di cammini:

• fisso $s=0$: osservo che $\tilde{H}(0,t)$ è sollevamento di $H(0,t) = C_{x_0}$

Ma anche $C_{\tilde{x}_0}$ è sollevamento di C_{x_0} , con $C_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{H}(0,0)$

Per unicità, $\tilde{H}(0,t) = C_{\tilde{x}_0}(t)$

• fisso $s=1$: osservo che $\tilde{H}(1,t)$ è sollevamento di $H(1,t) = C_{x_1}$

Ma anche $C_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)}$ è sollevamento di C_{x_1} , con

$C_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)}(0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{H}(1,0)$

Per unicità, $\tilde{H}(1,t) = C_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)}$

Quindi \tilde{H} è omotopia di cammini

• fisso $t=1$: osservo che $\tilde{H}(s,1)$ è sollevamento di $H(s,1) = \beta(s)$,

con $\tilde{H}(0,1) = \tilde{x}_0 = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}(0)$

Per unicità, $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}(s)$ □

Oss In particolare, abbiamo che $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}(1)$

Otteniamo due corollari.

corollario

Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento sia $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

Allora l'omomorfismo $p_*: \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ è iniettivo

DIMOSTRAZIONE

Sia $[\tilde{\alpha}] \in \text{Ker } p_*$, ovvero $p_*([\tilde{\alpha}]) = [C_{x_0}]$

Quindi $p \circ \tilde{\alpha} \sim C_{x_0}$

Quindi $\exists H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ omotopia di cammini tra $p \circ \tilde{\alpha}$ e C_{x_0}

Per il teorema precedente, $\exists \tilde{H}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow E$ tra

$\widetilde{p \circ \tilde{\alpha}}_{\tilde{x}_0} = \tilde{\alpha}$ e $\widetilde{C_{x_0}}_{x_0} = C_{\tilde{x}_0}$

Quindi $\tilde{\alpha} \sim C_{\tilde{x}_0} \Rightarrow [\tilde{\alpha}] = [C_{\tilde{x}_0}] = 0_{\pi_1(E, \tilde{x}_0)}$

Quindi p_* è iniettivo. □

Oss Se X è semplicemente connesso, siccome p_* è iniettivo, allora E è semplicemente connesso

corollario

S^1 non è semplicemente connesso

È un corollario del teorema di sollevamento. Lo vedremo in modo più generale

Azione di monodromia

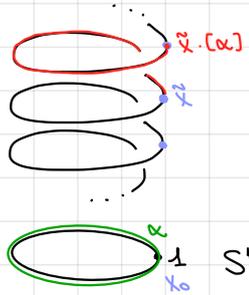
Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, $x_0 \in X$

Definiamo un'azione destra di $\pi_1(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0) =: F$

ovvero $F \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$ azione di gruppo

teorema da funzione $F \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$
 $(\tilde{x}, [\alpha]) \mapsto \tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)$
 è un'azione destra, chiamata azione di monodromia.

Graficamente: $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$



DIMOSTRAZIONE

Mostro che è ben definita

Siano $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x_0)$, $\alpha \sim \beta \Rightarrow \exists H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ omotopia di cammini tra α e β .

Sia $\tilde{x} \in F$. Per il teorema di sollevamento, $\exists \tilde{H}: [0, 1]^2 \rightarrow E$ sollevamento di H tra $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}$ e $\tilde{\beta}_{\tilde{x}}$, che è omotopia di cammini.

Quindi $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}}(1)$, ovvero $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x} \cdot [\beta]$

Mostriamo che è un'azione

$$\tilde{x} \cdot [c_{x_0}] = (c_{\tilde{x}_0})_{\tilde{x}}(1) = c_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x} \quad \forall \tilde{x} \in F$$

$$\tilde{x} \cdot ([\alpha] * [\beta]) = \tilde{\alpha * \beta}_{\tilde{x}}(1)$$

Ma anche $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}} * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha_{\tilde{x}}(1)}}$ è sollevamento di $\alpha * \beta$ con punto iniziale \tilde{x}

$$\text{Quindi } \tilde{x} \cdot ([\alpha] * [\beta]) = (\tilde{\alpha}_{\tilde{x}} * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha_{\tilde{x}}(1)}})(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha_{\tilde{x}}(1)}}(1)$$

$$\text{Considero } (\tilde{x} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] = (\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)) \cdot [\beta] = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha_{\tilde{x}}(1)}}(1)$$

Quindi la funzione definita è un'azione di gruppo. □

teorema Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento, X connesso per archi, $F = p^{-1}(x_0)$
 (1) l'azione di monodromia è transitiva $\iff E$ connesso per archi
 (2) $\text{Stab}(\tilde{x}) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$

DIMOSTRAZIONE

$$(1) (\Leftarrow) \text{ Mostro che } \forall \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F \exists [\alpha]: \tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \tilde{x}_1$$

Si come E è cpa, $\exists \gamma \in \Omega(E, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$

Quindi $p(\gamma) \in \Omega(X, x_0, x_0)$, perché $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F$

Osservo che γ è sollevamento di $p(\gamma)$ t.c. $\gamma(0) = \tilde{x}_0$

$$\text{Quindi } \tilde{x}_0 \cdot [p(\gamma)] = \gamma(1) = \tilde{x}_1$$

$$(\Rightarrow) \text{ Siano } \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in E, \text{ sia } \tilde{x}_0 \in F$$

sia γ_1 cammino da $x_1 := p(\tilde{x}_1)$ a x_0

e γ_2 cammino da $x_2 := p(\tilde{x}_2)$ a x_0

Considero $\tilde{f}_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ e $\tilde{f}_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$

Siano $\tilde{y}_1 = \tilde{f}_1^{-1}(y_1)$ e $\tilde{y}_2 = \tilde{f}_2^{-1}(y_2)$: osservo che $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in F$.

Si come l'azione è transitiva, $\exists [\alpha] \in F$ s.t. $\tilde{y}_1 \cdot [\alpha] = \tilde{y}_2$

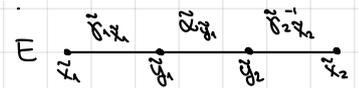
ovvero $\tilde{\alpha}_{\tilde{y}_1}(1) = \tilde{y}_2$

Quindi $\tilde{f}_1^{-1}(y_1) * \tilde{\alpha}_{\tilde{y}_1} * \tilde{f}_2^{-1}(y_2)$ è un cammino da \tilde{X}_1 a \tilde{X}_2 .

Quindi E è cpa

$$\begin{aligned} (2) [\alpha] \in \text{Stab}(\tilde{X}) &\iff \tilde{X} \cdot [\alpha] = \tilde{X} \iff \tilde{\alpha}_{\tilde{X}}(1) = \tilde{X} \\ &\iff [\tilde{\alpha}_{\tilde{X}}] \in \pi_1(E, \tilde{X}) \iff [\alpha] \in p_* (\pi_1(E, \tilde{X})) \\ &\text{siccome } p_* \tilde{\alpha}_{\tilde{X}} = \alpha \end{aligned}$$

□



Conseguenze su $\pi_1(X, x_0)$

corollario Se X connesso per archi ammette un rivestimento connesso per archi e di grado > 1 , allora $\pi_1(X, x_0) \neq \{e\}$

DIMOSTRAZIONE

Siccome il rivestimento ha grado $> 1 \implies \exists \tilde{x}_0 \neq \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$

Siccome E è cpa, $\exists [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ s.t. $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \tilde{x}_1$

Quindi $\exists [\alpha] \neq [e]$

□

corollario S^1 e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (con $n \geq 1$) non sono semplicemente connessi

Calcoliamo $\pi_1(S^1)$

teorema $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

DIMOSTRAZIONE

Sia $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$

Fissiamo $1 \in S^1$. Allora $F = p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ (sottogruppo di \mathbb{R})

Mostriamo che la mappa $\psi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ è isomorfismo

$$[\alpha] \longmapsto 0 \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_0(1)$$

- ψ surgettivo: \mathbb{R} è cpa \iff azione di monodromia transitiva $\implies \forall \tilde{y} \in F \exists [\alpha] \text{ t.c. } 0 \cdot [\alpha] = \tilde{y}$, ovvero $\forall \tilde{y} \in F \exists [\alpha] : \psi([\alpha]) = \tilde{y}$
- ψ iniettivo: $\text{Ker}(\psi) = \{[\alpha] : 0 \cdot [\alpha] = 0\} = \text{Stab}(0) = p_* (\pi_1(\mathbb{R}, 0)) = \{e\}$
- ψ è omomorfismo di gruppi: $\psi([\alpha] * [\beta]) = 0 \cdot ([\alpha] * [\beta]) = \tilde{\alpha}_0 * \tilde{\beta}_0(1)$

Abbiamo già osservato, per unicità dei sollevamenti, si ha

$$(\tilde{\alpha} * \tilde{\beta})_0(1) = (\tilde{\alpha}_0 * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)})_0(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1)$$

Definisco $\hat{\beta} := \tilde{\beta}_0 + \tilde{\alpha}_0(1)$. Osservo che $\hat{\beta}(0) = \tilde{\beta}_0(0) + \tilde{\alpha}_0(1) = \tilde{\alpha}_0(1)$

$$(p \circ \hat{\beta})(t) = e^{2\pi i \hat{\beta}(t)} = e^{2\pi i \tilde{\beta}_0(t)} \cdot e^{2\pi i \tilde{\alpha}_0(1)} = e^{2\pi i \tilde{\beta}_0(t)} = (p \circ \tilde{\beta}_0)(t) = \beta(t)$$

Quindi $\hat{\beta}$ è l'unico sollevamento di β con $\hat{\beta}(0) = \tilde{\alpha}_0(1) : \hat{\beta} = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}$

Quindi $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1) = \tilde{\beta}_0(1) + \tilde{\alpha}_0(1)$

$$\psi([\alpha] * [\beta]) = \psi([\hat{\beta}]) + \psi([\alpha])$$

□

corollario S^1 non è un retratto di \mathbb{R}^2
(di nessun $D \supset S^1$, D semplicemente connesso)

DIMOSTRAZIONE

Se S^1 fosse retratto di \mathbb{R}^2 , allora

$\hookrightarrow \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2, 1)$ sarebbe iniettivo $\hookrightarrow \square$

Utilizziamo il corollario per dimostrare il seguente teorema.

**teorema di
Brouwer**

Sia $f: D^2 \rightarrow D^2$ continua.

Allora f ha un punto fisso ($\exists x \in D^2 : f(x) = x$)

DIMOSTRAZIONE

Sopponiamo per assurdo $f(x) \neq x \quad \forall x \in D^2$

Costruiamo una retrazione da D^2 a $\partial D^2 = S^1$

Sopponiamo $D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Sia $r(x)$ l'intersezione dell'unica (poiché $f(x) \neq x$)

retta per x e $f(x)$ con ∂D^2 che è più vicina a x

Quindi $r: D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$

Mostro r retrazione

• Osservo che $r(x) = x \quad \forall x \in \partial D^2$

• r continua: la retta tra x e $f(x)$ è parametrizzata da

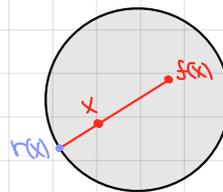
$$t \mapsto f(x) + t(x - f(x))$$

Quindi $r(x) = f(x) + t_0(x - f(x))$ con t_0 unica soluzione positiva

di $\|f(x) + t(x - f(x))\| = 1$ (eq. di 2° grado in t)

la soluzione positiva t_0 dipende con continuità dai coefficienti

Quindi r è retrazione $\hookrightarrow \square$



Oss È vero che S^{n-1} non è retratto di \mathbb{R}^n , $\forall n$,
ma non si vede dal π_1

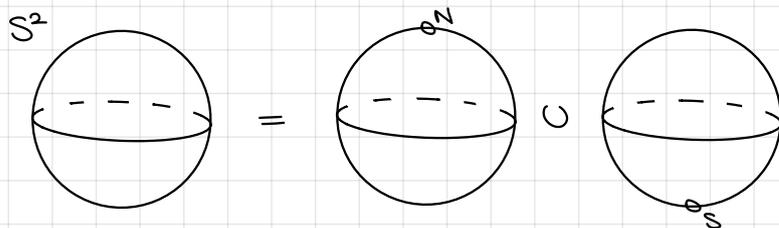
Teorema di Seifert-van Kampen

Idea: strumento per calcolare $\pi_1(X)$ sapendo che

- $X = A \cup B$, con A, B aperti
- avendo informazioni su $\pi_1(A \cap B)$

(sotto l'ipotesi che tutto sia cpa)

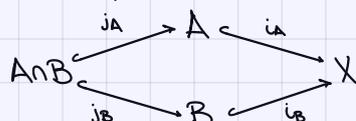
esempio



e osservo che $A \cap B = S^2 - \{N, S\} \sim S^1$

Teorema di Seifert-van Kampen

Sia $X = A \cup B$, A e B aperti. Supponiamo che A, B e $A \cap B$ siano connessi per archi. Siamo



Sia $x_0 \in A \cap B$ Allora:

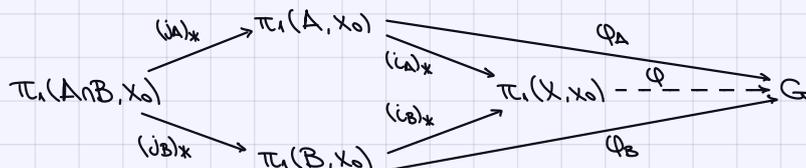
(1) $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$ e $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$

(2) Per ogni gruppo G con omomorfismi

$\varphi_A: \pi_1(A, x_0) \rightarrow G$ e $\varphi_B: \pi_1(B, x_0) \rightarrow G$ tali che

$\varphi_A \circ (j_A)_* = \varphi_B \circ (j_B)_*$ $\exists!$ omomorfismo $\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$

con $\varphi_A = \varphi \circ (i_A)_*$ e $\varphi_B = \varphi \circ (i_B)_*$



DIMOSTRAZIONE

(1) Sia $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Voglio mostrare che α è omotopo come cammino alla giunzione di cammini chiusi su A e B .

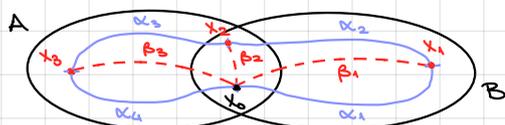
$\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ e $[0, 1]$ è metrico e compatto.

$\{A, B\}$ è rivestimento di $X \Rightarrow \{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$ è ricoprimento di $[0, 1]$

$\exists \varepsilon > 0: \forall t \in [0, 1] \quad \alpha(B(t, \varepsilon)) \subseteq A \cup B$

Quindi per $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ho che $\alpha\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \subseteq A \cup B \quad \forall k = 1, \dots, n$

Sia $\alpha_k: [0, 1] \rightarrow X, \alpha_k(t) = \alpha\left(\frac{k-1+t}{n}\right)$



Sia $x_k = \alpha_k(t)$. Se $x_k \in A \cap B$ cpa $\Rightarrow \exists \beta_k \in \mathcal{Q}(A \cap B, x_k, x_0)$

Se $x_k \in A$ cpa $\Rightarrow \exists \beta_k \in \mathcal{Q}(A, x_k, x_0)$ Se $x_k \in B$ cpa $\Rightarrow \exists \beta_k \in \mathcal{Q}(B, x_k, x_0)$

In particolare ciascun β_k è contenuto in A o in B.

Sia $\gamma_1 = \alpha_1 * \beta_1$ e $\gamma_k = \beta_{k-1}^{-1} * \alpha_k * \beta_k \quad \forall k=2, \dots, n-1$, $\gamma_n = \beta_{n-1}^{-1} * \alpha_n$

Quindi $\gamma_i \in \mathcal{Q}(X, x_0, x_0)$ e per costruzione ciascun γ_k è tutto contenuto in

A o in B. Quindi $\gamma_1 * \dots * \gamma_n = \alpha_1 * \beta_1 * \beta_1^{-1} * \alpha_2 * \beta_2 * \dots * \alpha_n \sim \alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n = \alpha$

Quindi $[\alpha] = [\gamma_1] * \dots * [\gamma_n]$ e $[\gamma_i] = (i_{A \cap B})_*([\beta_i])$ con

$$(i_{A \cap B})_*([\gamma]) = \begin{cases} (i_A)_*([\gamma]) & \text{se } [\gamma] \in \pi_1(A, x_0) \\ (i_B)_*([\gamma]) & \text{se } [\gamma] \in \pi_1(B, x_0) \end{cases}$$

Quindi α è prodotto di classi in $(i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$ e $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$

(2) Mostro che $\exists!$ $\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$

UNICITA': considero $\varphi([\alpha]) = \varphi([\gamma_1] * \dots * [\gamma_n])$ con $[\gamma_i] \in (i_A)_*(\pi_1(A, x_0))$ o $(i_B)_*(\pi_1(B, x_0))$

$$\varphi \text{ omom} \Rightarrow \varphi([\alpha]) = \varphi([\gamma_1]) \dots \varphi([\gamma_n]) = \varphi_{AB}([\gamma_1]) \dots \varphi_{AB}([\gamma_n]) \quad (*)$$

$$\text{con } \varphi_{AB}([\gamma]) = \begin{cases} \varphi_A([\gamma]) & \text{se } [\gamma] \in \pi_1(A, x_0) \\ \varphi_B([\gamma]) & \text{se } [\gamma] \in \pi_1(B, x_0) \end{cases}$$

Quindi, se φ esiste, è unica perché è definita da (*)

ESISTENZA: definisco $\varphi([\alpha]) = \varphi_{AB}([\gamma_1]) \dots \varphi_{AB}([\gamma_n])$ con $\gamma_i \in \mathcal{Q}(A, x_0, x_0)$ o $\mathcal{Q}(B, x_0, x_0)$

(posso sceglierli) tali che $\gamma_1 * \dots * \gamma_n = \alpha$. Dobbiamo verificare:

(i) se $\gamma_i \in \mathcal{Q}(A \cap B, x_0, x_0) \Rightarrow \varphi_A([\gamma_i]) = \varphi_B([\gamma_i])$

(ii) non dipende dalla scelta dei γ_i

(iii) se $\alpha \sim \beta \Rightarrow \varphi([\alpha]) = \varphi([\beta])$

(iv) φ omomorfismo

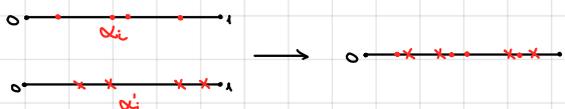
(v) φ fa commutare il diagramma

(i) Sia $\gamma_i \in \mathcal{Q}(A \cap B, x_0, x_0)$, $[\gamma_i] = (j_A)_*([\gamma_i]) = (j_B)_*([\gamma_i])$

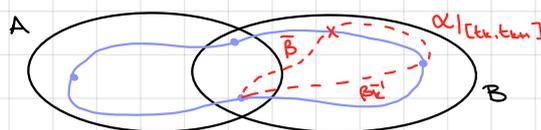
$$\Rightarrow \varphi_A([\gamma_i]) = (\varphi_A \circ (j_A)_*)([\gamma_i]) = (\varphi_B \circ (j_B)_*)([\gamma_i]) = \varphi_B([\gamma_i])$$

(ii) Consideriamo due suddivisioni di α , $\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_n = \alpha'_1 * \dots * \alpha'_n$

Prendiamo il raffinamento:



Quindi ogni intervallo del raffinamento corrisponde ad $\alpha|_I$ che è contenuto in A o in B. Siccome il raffinamento è ottenuto suddividendo gli intervalli, basta mostrare che φ non cambia se ne suddividiamo uno.



Sia $\gamma = \alpha(E)$, con $E \in [t_k, t_{k+1}]$ dove $\alpha_k = \alpha|_{[t_k, t_{k+1}]}$

Definisco $\bar{\gamma}_1 = \beta_2^{-1} * \alpha|_{[t_k, E]} * \beta$ con $\beta \in \mathcal{Q}(X, \gamma, x_0)$, supponendo $\gamma \in A$.

$\bar{\gamma}_2 = \beta^{-1} * \alpha|_{[E, t_{k+1}]} * \beta_{k+1}$. Osservo che:

$$\bar{\gamma}_1 * \bar{\gamma}_2 = \beta_2^{-1} * \alpha|_{[t_k, t_{k+1}]} * \beta * \beta^{-1} * \alpha|_{[E, t_{k+1}]} * \beta_{k+1} \sim$$

$$\sim \beta_2^{-1} * \alpha|_{[t_k, E]} * \alpha|_{[E, t_{k+1}]} * \beta_{k+1} \sim \beta_2^{-1} * \alpha|_{[t_k, t_{k+1}]} * \beta_{k+1} = \gamma_k$$

Quindi $\varphi_A([\gamma_k]) = \varphi_A([\bar{\gamma}_1]) \varphi_A([\bar{\gamma}_2])$

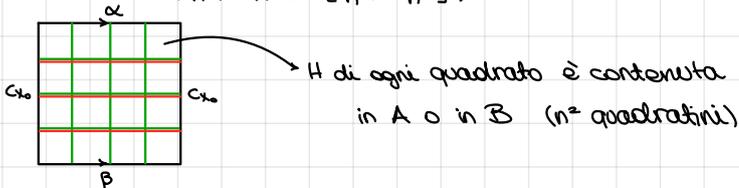
Prima di suddividere: $\varphi([\alpha]) = \varphi_{AB}([\gamma_1]) \dots \varphi_{AB}([\gamma_n])$

Dopo la suddivisione: $\varphi([\alpha]) = \varphi_{AB}([\gamma_1]) \dots \varphi_{AB}([\gamma_{k-1}]) \underbrace{\varphi_{AB}([\bar{\gamma}_1]) \varphi_{AB}([\bar{\gamma}_2])}_{\varphi_A([\gamma_k])} \dots \varphi_{AB}([\gamma_n])$

(iii) Siano $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x_0)$. Mostro $\varphi([\alpha]) = \varphi([\beta])$

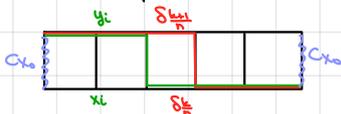
Sia H omotopia di cammini tra α e β , $[0, 1]^2$ è metrico e compatto

$\Rightarrow \exists n : H([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}], [\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}]) \subseteq A$ o $\subseteq B$ (numero di Lebesgue di $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$)



Definisco $\delta_k^{\frac{k}{n}} = H(\cdot, \frac{k}{n}) \forall k=0, \dots, n$, $\delta_0 = \alpha$, $\delta_n = \beta$, $\delta_i \in \Omega(X, x_0, x_0)$

Mostro $\varphi([\delta_k^{\frac{k}{n}}]) = \varphi([\delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}}]) \forall k=0, \dots, n-1$



Poiché l'omotopia è a estremi fissi, i lati verticali sono costanti perciò $\delta_k^{\frac{k}{n}} \sim \delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}} * C_{x_0}$

$$\delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}} \sim C_{x_0} * \delta_k^{\frac{k}{n}}$$

Inoltre nella partizione di $\delta_k^{\frac{k}{n}}$, $\delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}}$ che utilizzo per definire φ , posso inglobare C_{x_0} nel primo pezzetto di $\delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}}$ e nell'ultimo di $\delta_k^{\frac{k}{n}}$

Sia $\delta_k^{\frac{k}{n}}$ sia $\delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}}$ sono già partizionati in pezzetti contenuti in A o in B , e uso tale partizione per costruire i relativi cammini γ (congiungendo i punti di $\delta_k^{\frac{k}{n}}$ e $\delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}}$ a x_0 tramite i β) e definire φ .

Per passare dal cammino rosso $\delta_k^{\frac{k}{n}} * C_{x_0}$ al cammino verde $C_{x_0} * \delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}}$,

uso k passaggi elementari,

che permettono di passare



da $\delta_k^{\frac{k}{n}} * C_{x_0}$ a $C_{x_0} * \delta_{k+1}^{\frac{k+1}{n}}$ con un passaggio del tipo



Se per ciascuno di questi passaggi il valore di φ non cambia, ho finito

Il cammino rosso è della forma $a_1 * a_2 * \dots * a_i * w * b_{i+1} * \dots * b_n$

Quello verde è $a_1 * \dots * a_{i-1} * w * b_i * \dots * b_n$

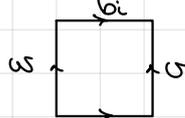
Ciascuno di questi pezzetti, opportunamente concatenati con i β che li

congiungono a x_0 , dà luogo a un loop basato in x_0 , sul quale devo valutare φ_A o φ_B

Poiché $a_1, \dots, a_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$ sono in comune al cammino rosso e a quello verde,

devo solo controllare che le cose vadano bene nel quadrato in cui

i due cammini si differenziano



Per costruzione, questo quadrato va tutto in A o tutto in B tramite H .

Sopponiamo, ad esempio, in A . Ma allora $a_i * v$ è omotopo a estremi

fissi a $w * b_i$, per cui, $x = a_i(t) = w(t)$, $y = v(t) = b_i(t)$, anche

$$\beta_x^* * a_i * v * \beta_y \sim \beta_x^* * w * b_i * \beta_y$$

Applicando φ_A a questi due loop, ottengo gli stessi valori

di dunque $\varphi([\alpha]) = \varphi([\beta])$

(ii), (iv) seguono immediatamente dalla costruzione.



corollario Sia $X = A \cup B$ con $A, B, A \cap B$ aperti connessi per archi, $x_0 \in A \cap B$.
 Se A e B sono semplicemente connessi, allora
 X è semplicemente connesso.

DIMOSTRAZIONE

Per Van Kampen, $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $(i_A)_* (\pi_1(A, x_0)) \cup (i_B)_* (\pi_1(B, x_0)) = \{e\}$ \square

corollario S^n è semplicemente connesso per $n \geq 2$

DIMOSTRAZIONE

$$A = S^n \setminus \{N\}, B = S^n \setminus \{S\}$$

Allora A, B sono omeomorfi a \mathbb{R}^n , dunque sono semplicemente connessi.

$A \cap B \cong \mathbb{R}^n \setminus \{pt.\}$, che è connesso per archi per $n \geq 2$ \square

Per $n=1$, S^1 non è semplicemente connesso.

Nella dimostrazione A e B rimangono semplicemente connessi,
 ma $A \cap B$ non è connesso per archi.

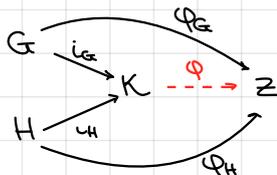
prodotto libero

Siano G, H gruppi.

Il prodotto libero di G e H è un gruppo K con omeomorfismi

$i_G: G \rightarrow K, i_H: H \rightarrow K$ t.c., per ogni coppia di omeomorfismi

$\varphi_G: G \rightarrow Z, \varphi_H: H \rightarrow Z, \exists!$ omeomorfismo $\varphi: K \rightarrow Z$ t.c. $\varphi \circ i_G = \varphi_G, \varphi \circ i_H = \varphi_H$



L'unicità, a meno di isomorfismo, di un tale K si può dimostrare utilizzando la proprietà universale.

L'esistenza ci obbliga a costruire K .

K sarà il gruppo delle parole con alfabeto $G \cup H$

Più formalmente, sia P l'insieme delle liste finite ordinate di elementi di $G \cup H$, inclusa la lista vuota.

Un elemento (g_1, g_2, h_1, g_3) di P sarà indicato come stringa, cioè $g_1 g_2 h_1 g_3$

P è un monoidale associativo con l'operazione di giustapposizione

È un monoidale con identità, data da \emptyset

Se P consideriamo la relazione di equivalenza generata da (cioè la più piccola che contiene) le seguenti relazioni:

(1) per ogni coppia di stringhe w, w', w'' , $w'' h w' \sim w'' g w' \sim w'' w'$

(2) se w, w' sono stringhe e $g_1, g_2 \in G$, $w g_1 g_2 w' \sim w g_2 w'$ dove $g = g_1 g_2 \in G$

Analogo per H

d'operazione su \mathcal{P} passa al quoziente su $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}/\sim$

Ora $\bar{\mathcal{P}}$ è effettivamente un gruppo: associatività, elemento neutro vengono ereditati da \mathcal{P} , mentre l'inverso di una stringa si ottiene invertendo l'ordine dei suoi elementi e prendendo l'inverso moltiplicativo di ciascuno di essi. Ogni elemento $[\omega] \in \bar{\mathcal{P}}$ ha un rappresentante (unico) preferito, detto "forma ridotta": è l'unico rappresentante in cui non compaiono simboli consecutivi entrambi in G o entrambi in H , né compaiono 1_G o 1_H .

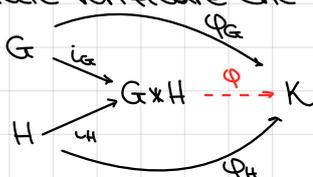
La forma ridotta dell'identità di $G \times H = \bar{\mathcal{P}}$ è \emptyset .

Inoltre abbiamo anche qui vari omomorfismi

$$\begin{array}{ccc} i_G : G & \longrightarrow & G \times H \\ g & \longmapsto & \bar{g} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} i_H : H & \longrightarrow & G \times H \\ h & \longmapsto & \bar{h} \end{array}$$

D'ora in poi, con un abuso, indicheremo con w anche la classe in $\bar{\mathcal{P}} = G \times H$ di una parola $w \in \mathcal{P}$

È anche facile verificare che questo gruppo verifica la proprietà universale



Dati omomorfismi ϕ_G, ϕ_H , definisco ϕ ponendo

$$\phi(g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_n h_n) = \phi_G(g_1) \phi_H(h_1) \dots \phi_G(g_n) \phi_H(h_n)$$

dove $g_1 h_1 \dots g_n h_n$ è una parola ridotta in $G \times H$

Analogo per parole che cominciano con caratteri in H o finiscono con caratteri in G (o entrambi), mentre $\phi(\emptyset) = 1_K$

È chiaro che ϕ è omomorfismo

Il fatto che ϕ estenda ϕ_G e ϕ_H è conseguenza diretta della definizione:

$$\phi \circ i_G(g) = \phi(g) = \phi_G(g)$$

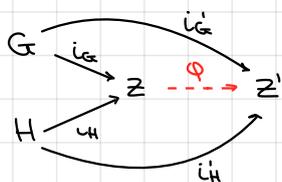
Notiamo che i_G, i_H sono iniettive e che $i_G(G)$ e $i_H(H)$ generano $G \times H$ per cui ϕ è unica

Vediamo che effettivamente esiste un unico gruppo a meno di isomorfismo che verifica la proprietà universale, per cui $G \times H$ ha diritto di chiamarsi il prodotto libero.

Siamo infatti $(Z, i_G : G \rightarrow Z, i_H : H \rightarrow Z)$, $(Z', i'_G : G \rightarrow Z', i'_H : H \rightarrow Z')$ due prodotti liberi.

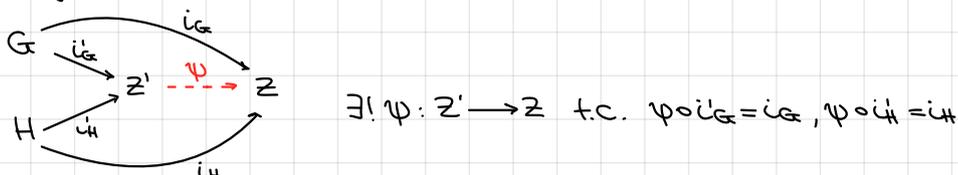
L'idea è di usare Z come prodotto libero e Z' come gruppo test, il viceversa e ottenere due omomorfismi $Z \rightarrow Z', Z' \rightarrow Z$ che saranno (per unicità) inversi uno dell'altro.

Poiché Z è un prodotto libero



$$\exists! \phi : Z \rightarrow Z' \text{ f.c. } \phi \circ i_G = i'_G, \phi \circ i_H = i'_H$$

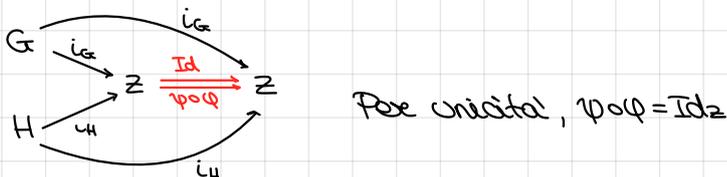
Analogamente, poiché Z' è un prodotto libero



Per costruzione, $\psi \circ \varphi \circ i_G = \psi \circ i_G = i_G$

e analogamente $\psi \circ \varphi \circ i_H = \psi \circ i_H = i_H$

Perciò l'omomorfismo $\psi \circ \varphi: Z \rightarrow Z$ è l'identità $\text{Id}: Z \rightarrow Z$
 fanno entrambi commutare questo diagramma



Analogamente, $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{Z'}$, da cui la tesi.

In particolare $Z \cong Z'$

FATTI : (1) $G * \{1\} \cong G$

(2) $G * H = H * G$

(3) $(G_1 * G_2) * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$

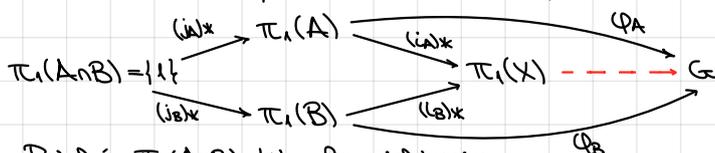
(4) se $G \neq \{1\}, H \neq \{1\}$, $G * H$ non è abeliano

Infatti, se $g \in G \setminus \{1\}, h \in H \setminus \{1\}$, $gh \neq hg$ in $G * H$

teorema Sia $X = A \cup B$ con A, B aperti connessi per archi
 e $A \cap B$ semplicemente connesso.
 Allora $\pi_1(X) \cong \pi_1(A) * \pi_1(B)$

DIMOSTRAZIONE

Siamo nelle ipotesi di Van Kampen, con diagramma



Poiché $\pi_1(A \cap B) = \{1\}$, la richiesta

$\varphi_B \circ (j_B)_* = \varphi_A \circ (j_A)_*$ è sempre verificata.

Perciò, in questo caso, la tesi del teorema di Van Kampen,
 è una riformulazione del fatto $\pi_1(X) = \pi_1(A) * \pi_1(B)$ □

corollario Sia $X = S^1 \vee \dots \vee S^1$ il bouquet di k copie di S^1
 Allora $\pi_1(X) = \underbrace{Z * \dots * Z}_{k \text{ copie}}$

Vedremo tra poco che $Z * \dots * Z = F_k$ gruppo libero di rango k

DIMOSTRAZIONE

Si può fare per induzione su k

• $k=1$: $X=S^1$, $\pi_1(X)=\mathbb{Z}$

• passo induttivo: Sia X il bouquet di $(k+1)$ S^1 :

Vorrei prendere A = unione di k circonferenze, $B = k+1$ circonferenza

Però questi A e B non sono aperti

Prendo allora un piccolo intorno A' di A e un piccolo intorno B' di B

in modo che A' si retragga per deformazione su A , B' su B e $A' \cap B'$ su $A \cap B$

Donque $A' \cap B'$, retrandosi per deformazione a un punto, è semplicemente connesso e

$$\pi_1(X) = \pi_1(A') * \pi_1(B') = \pi_1(A) * \pi_1(B) = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{k \text{ volte}} * \mathbb{Z}$$

□

corollario $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{k \text{ punti}\}) \cong F_k$

DIMOSTRAZIONE

$\mathbb{R}^2 \setminus \{k \text{ punti}\}$ si retrae per deformazione su $S^1 \vee \dots \vee S^1$ □

Il gruppo libero

Sia S un alfabeto (insieme di simboli)

Il gruppo libero su S , che si denota con $F(S)$ è il gruppo delle parole ridotte nei simboli di S e nelle loro potenze formali, con il prodotto già descritto nel caso del prodotto libero di gruppi

Può essere visto come quoziente delle parole non ridotte

Per definizione, è isomorfo a $\underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{|S| \text{ fattori}}$:

se $S = \{s_i | i \in I\}$, $F(S) = \prod_{i \in I} G_i$ con $G_i = \langle s_i \rangle \cong \mathbb{Z}$

Anche il gruppo libero ammette una descrizione tramite proprietà universale:

data una qualsiasi funzione $f: S \rightarrow G$, dove G è un gruppo,

$\exists!$ $\varphi: F(S) \rightarrow G$ omomorfismo t.c. $\varphi(s) = f(s) \forall s \in S$

(lo si può dimostrare o usando che $F(S) = \prod_{s \in S} G_s$, $G_s = \langle s \rangle \cong \mathbb{Z}$ e usando quanto visto per i prodotti liberi, o direttamente)

presentazioni di gruppi

Una presentazione di un gruppo G è la scelta di un insieme S ("generatori") e un sottoinsieme $R = F(S)$ ("relazioni") tali che

$$G \cong F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$$

dove $\langle\langle R \rangle\rangle$ è il più piccolo sottogruppo normale di $F(S)$ che contiene R

(ben definito perché intersezione di tutti i sottogruppi normali che contengono R)

NOTAZIONE $G = \langle S | R \rangle$

esempio $G = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$

$G = \langle a, b | a^2b^3, aba^{-1} \rangle$

proposizione Sia $G = \langle S | R \rangle$, e sia $f: S \rightarrow H$ una funzione t.c.
 \forall relazione $w = s_1^{n_1} \dots s_k^{n_k} \in R$ si ha $f(s_1)^{n_1} \dots f(s_k)^{n_k} = 1_H$.
 Allora $\exists!$ omomorfismo $\varphi: G \rightarrow H$ t.c. $\varphi([s]) = f(s) \forall s \in S$

DIMOSTRAZIONE

Per la proprietà universale del prodotto libero,

$$\exists! \psi: F(S) \rightarrow H \quad \text{t.c.} \quad \psi(s) = f(s) \quad \forall s \in S$$

Voglio vedere che l'ipotesi consente a ψ di passare al quoziente su G .

Per il I teorema di omomorfismo, basta vedere che ψ si annulla su $\langle\langle R \rangle\rangle$

Però l'ipotesi assicura che ψ si annulla su R , perciò $R \subseteq \text{Ker } \psi$, da cui $\langle\langle R \rangle\rangle \subseteq \text{Ker } \psi$ in quanto $\text{Ker } \psi \triangleleft F(G)$.

Per costruzione, la mappa indotta $\bar{\psi}: G \rightarrow H$ verifica $\bar{\psi}([s]) = \psi(s) = f(s)$

L'unicità segue dal fatto che S genera $F(S)$ e dunque $\{[s], s \in S\}$ genera G □

In generale, "determinare le proprietà" di G a partire da una sua presentazione $G = \langle S | R \rangle$ è difficile.

(1) Come descrivere $\langle\langle R \rangle\rangle \subseteq F(S)$?

Una parola $w \in F(S)$ appartiene a $\langle\langle R \rangle\rangle$ se e solo se \exists relazioni $r_1, \dots, r_k \in R$, $k \in \mathbb{N}$ e parole $w_1, \dots, w_k \in F(S)$ t.c.

$$w = \prod_{j=1}^k w_j r_j^{\pm 1} w_j^{-1} \quad (*)$$

Infatti, è chiaro che se w ha tale forma, allora $w \in \langle\langle R \rangle\rangle$.

Inoltre, l'insieme delle parole della forma (*) dà un sottogruppo normale che contiene R , per cui $\langle\langle R \rangle\rangle \subseteq \{ \text{parole del tipo } (*) \}$, e quindi

$$\langle\langle R \rangle\rangle = \{ \text{parole del tipo } (*) \}$$

(2) (Problema della parola) Data $w \in F(S)$, esiste un algoritmo che decide se $w \in \langle\langle R \rangle\rangle$? O, in maniera equivalente, se $[w] = 1_G$?

In generale, NO (Anche nel caso di presentazioni finite, cioè

$|R| < +\infty, |S| < +\infty$): un problema è che, ad esempio, non esiste un bound a priori su k in funzione della lunghezza di w nella formula (*).

(3) (Problema dell'isomorfismo) Se $G = \langle S | R \rangle$, esiste un algoritmo che decide se $G = \{1\}$?

In generale, NO.

esempio (1) $G = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$

Dimostriamo che $G \cong \mathbb{Z}^2$

Poiché $aba^{-1}b^{-1} \in R$, $[aba^{-1}b^{-1}] = 1_G$, cioè $[ab] = [ba]$ in G , cioè $[a][b] = [b][a]$. Poiché $[a], [b]$ generano G , G è abeliano.

Per dimostrare che $G \cong \mathbb{Z}^2$, sia $f: \{a, b\} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ con

$f(a) = (1, 0)$, $f(b) = (0, 1)$. Per capire se f induce un omomorfismo

$\varphi: F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2$, devo vedere se f "rispetta le relazioni", cioè in questo caso $f(a) f(b) f(a)^{-1} f(b)^{-1} = 1_{\mathbb{Z}^2} = 0 \in \mathbb{Z}^2$, cioè

$$(1, 0) + (0, 1) - (1, 0) - (0, 1) = (0, 0), \text{ che è vero.}$$

Donque \exists omomorfismo $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}^2$ t.c. $\varphi([a]) = (1,0)$, $\varphi([b]) = (0,1)$
 φ è chiaramente suriettivo (la sua immagine contiene dei generatori di \mathbb{Z}^2)
 Per vedere che φ è iniettivo, osserveremo che, poiché G è abeliano, ogni
 elemento di G è della forma $[a]^m [b]^n$, $m, n \in \mathbb{Z}$

Donque se $g = [a]^m [b]^n \in \text{Ker } \varphi$, allora

$$0 = \varphi(g) = \varphi([a]^m) \cdot \varphi([b]^n) = (m,0) + (0,n) = (m,n) \Rightarrow m=n=0$$

$$\Rightarrow g = [a]^0 [b]^0 = 1_G$$

□

2) $G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ non è abeliano

Cosa vuol dire $a^3 = b^2$? Formalmente, meglio scrivere $G = \langle a, b \mid a^3 b^{-2} \rangle$

In fatti, sia $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \alpha, \alpha^2\} * \{1, \beta\}$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$
 f rispetta la relazione, perché $f(a)^3 f(b)^{-2} = \alpha^3 \beta^{-2} = 1 \cdot 1 = 1$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Donque $\exists \varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ omomorfismo tale che $\varphi([a]) = \alpha$, $\varphi([b]) = \beta$.

Poiché $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ (già visto), $\varphi([a][b]) \neq \varphi([b][a]) \Rightarrow [a][b] \neq [b][a]$

Attenzione: usare sempre, se possibile, omomorfismi costruiti con la proprietà
 universale, e cercare di evitare l'uso della definizione: nell'ultimo esempio,
 dimostrare che $[a][b] \neq [b][a]$ mostrando che $aba^{-1}b^{-1}$ non è della forma
 $\prod_{j=1}^k w_j r_j^{\pm 1} w_j^{-1}$ dove $r_j = a^{\pm 3}$ o $r_j = b^{\pm 2}$ e w_j sono parole in a e b ,
 può essere molto difficile.

Prodotto amalgamato

Siano dati gruppi H, G_1, G_2 con omomorfismi $j_1: H \rightarrow G_1$, $j_2: H \rightarrow G_2$.

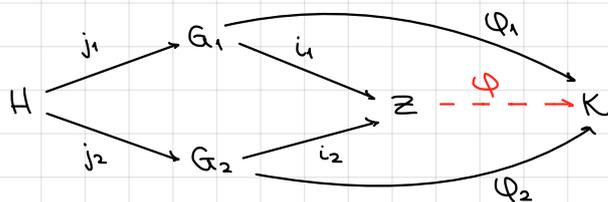
Il prodotto amalgamato di G_1 e G_2 lungo H (sarebbe meglio dire lungo (j_1, j_2))

è il dato di un gruppo Z e omomorfismi $i_1: G_1 \rightarrow Z$, $i_2: G_2 \rightarrow Z$ tali che

$i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ e coppia di omomorfismi $\varphi_1: G_1 \rightarrow K$, $\varphi_2: G_2 \rightarrow K$

tali che $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$ $\exists!$ omomorfismo $\varphi: Z \rightarrow K$ tale che

$$\varphi \circ i_1 = \varphi_1, \quad \varphi \circ i_2 = \varphi_2$$



teorema Il prodotto amalgamato Z appena descritto, che si indica con abuso $G_1 *_H G_2$ (abuso poiché si omettono j_1, j_2) esiste ed è unico a meno di isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE

L'unicità a meno di isomorfismo si dimostra con la proprietà universale esattamente come nel prodotto libero.

Per l'esistenza, costruiamo $Z = G_1 *_H G_2$ come segue:

$$Z = G_1 *_H G_2 / \langle\langle R \rangle\rangle \quad \text{dove } R = \{ j_1(h) j_2(h)^{-1} \mid h \in H \}$$

Il fatto che $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ segue dal fatto che abbiamo imposto

$$[j_1(h)] = [j_2(h)] \text{ in } Z \quad \forall h \in H, \text{ dove definiamo}$$

$$i_1: G_1 \rightarrow Z, g \mapsto [g] \quad \text{e} \quad i_2: G_2 \rightarrow Z, g \mapsto [g]$$

$$i_1: G_1 \xrightarrow{\text{inclusione standard}} G_1 *_H G_2 \xrightarrow{\text{proiezione standard}} G_1 *_H G_2 / \langle\langle R \rangle\rangle = Z \quad \text{e lo stesso } i_2.$$

Inoltre per la proprietà universale del prodotto libero

\exists un omorfismo $\psi: G_1 *_H G_2 \rightarrow K$ che estende ψ_1 e ψ_2 .

Poiché $\psi_1 \circ j_1 = \psi_2 \circ j_2$, $\forall h \in H$ abbiamo $\psi(j_1(h)) = \psi(j_2(h))$ da cui

$$\psi(j_1(h)) = \psi(j_2(h)) \quad \text{e} \quad \psi(j_1(h) j_2(h)^{-1}) = 1_K. \quad \text{Dunque } \psi \text{ si annulla su } R \text{ e perciò su } \langle\langle R \rangle\rangle$$

e passa perciò al quoziente definendo $\varphi: G_1 *_H G_2 / \langle\langle R \rangle\rangle \rightarrow K$

Per costruzione $\varphi \circ i_1 = \psi_1$ e $\varphi \circ i_2 = \psi_2$. Infine l'unicità di φ segue

dal fatto che $G_1 *_H G_2 / \langle\langle R \rangle\rangle$ è generato dalle classi degli elementi di G_1 ,

classi sulle quali φ è determinato da ψ_1 e ψ_2 . □

FATTO Con la notazione del teorema, se $H = \langle S \rangle$

e $R' = \{ j_1(s) j_2(s)^{-1} \mid s \in S \}$, allora $\langle\langle R \rangle\rangle = \langle\langle R' \rangle\rangle$

corollario Con le notazioni precedenti, se $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$,

$H = \langle S \rangle$ con $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, allora

$$G_1 *_H G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R \rangle, \text{ dove}$$

$R = \{ w_1(s) w_2(s)^{-1} \mid s \in S \}$, dove $w_1(s)$ è una parola in $F(S_1)$ che rappresenta $j_1(s)$ e $w_2(s)$ è una parola in $F(S_2)$ che rappresenta $j_2(s)$.

DIMOSTRAZIONE

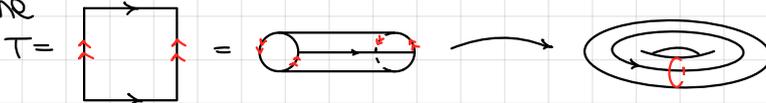
Segue dalla descrizione $G_1 *_H G_2 = G_1 *_H G_2 / \langle\langle R' \rangle\rangle$

dove $R' = \{ j_1(s) j_2(s)^{-1} \mid s \in S \}$ □

Gruppo fondamentale del toro

Il toro è $T = S^1 \times S^1$ e sappiamo che $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$,
 perciò $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Vediamolo anche in un altro modo.

Ricordiamo che



Calcoliamo $\pi_1(T)$ con Van Kampen. Sia $D = [-1, 1]^2$ il quadrato di partenza e
 sia $\pi: D \rightarrow D/\sim = T$ la proiezione al quoziente. Siamo $A = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq D$ aperto
 saturo e $A' = \pi(A) \cong T$, $B = D \setminus \{(0, 0)\}$ che è un aperto saturo, $B' = \pi(B) \cong T$.

Si vede facilmente che $A' \cong A$, $A \cap B \cong A \cap B'$ (la proiezione π si restringe a un omeo
 sull'immagine su A, e perciò su $A \cap B$): $\pi|_A: A \rightarrow A'$ è continua e bigettiva e tutti
 gli aperti di A sono saturi, per cui è anche aperta. Dunque $A' \cong A$ è semplicemente connesso.

$$A \cap B = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \{(0, 0)\} \cong S^1$$



$$\text{da cui } \pi_1(A \cap B') = \mathbb{Z}$$

Ricordo che $B = D \setminus \{(0, 0)\}$ si retrae per deformazione su ∂D

Questa retrazione per deformazione passa al quoziente, dando una
 retrazione per deformazione di B' su $\pi(\partial B) = \bigcirc \bigcirc$

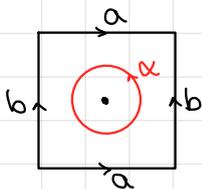
$$\text{Perciò } \pi_1(B') = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Poiché B' è cpa come nelle ipotesi di Van Kampen e ho il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(j_A)_*} & \pi_1(A') = \{1\} \\ \pi_1(A \cap B') = \mathbb{Z} & & \searrow \\ & \xrightarrow{(j_B)_*} & \pi_1(B') = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \\ & & \nearrow \\ & & \pi_1(T) \end{array}$$

$(j_A)_*$ è l'omomorfismo banale, mentre devo capire chi è

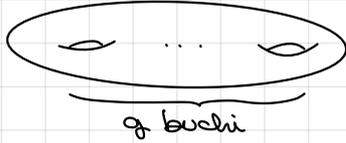
$$(j_B)_* : \begin{array}{ccc} \pi_1(A \cap B') & \longrightarrow & \pi_1(B') \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle \end{array}$$



α genera $\pi_1(A \cap B')$, $\alpha \sim aba^{-1}b^{-1}$ in B' , perciò il
 risultato è

$$\pi_1(T) = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * \{1\} / \langle (j_B)_*(\alpha) \cdot (j_A)_*(\alpha)^{-1} \rangle = \langle a, b \rangle / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z}^2$$

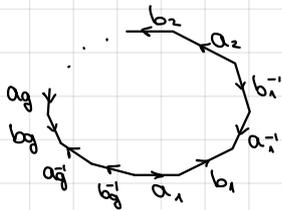
π_1 di superfici

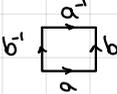
$\Sigma_g =$ superficie orientata di genere $g =$ 

$g=0 \Rightarrow \Sigma_0 = S^2$

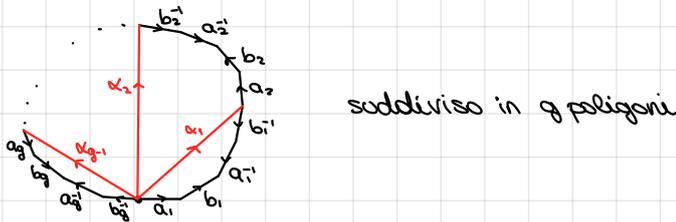
$g=1 \Rightarrow \Sigma_1 = S^1 \times S^1$ 

Per calcolarne il π_1 , ragioniamo come per il toro, realizzando Σ_g come quoziente di un $4g$ -agono



Se $g=1$, riotteniamo 

Per capire chi è il risultato del quoziente, si taglia il $4g$ -agono lungo le diagonali uscenti dal punto iniziale di a_1 con punti finali ogni 4 lati



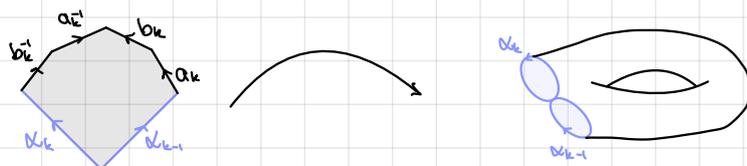
Vediamo che cos'è il quoziente di questi poligoni



Stessa cosa per

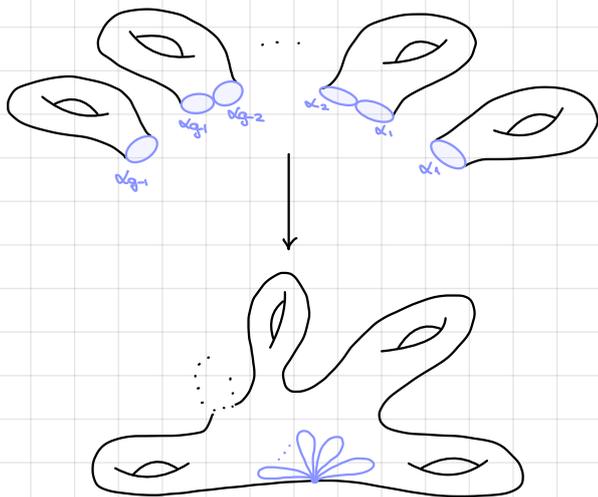


Per i poligoni centrali, si ha



So già che tutti i vertici del $4g$ -agono sono identificati tra loro (lo si può vedere anche prima di tagliare lungo le diagonali)

Ora riassiamo i pezzi riattaccandoli lungo gli α_i



Sia ora

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

teorema $\pi_1(\Sigma_g) \cong \pi_1(T_g)$

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione è identica a quella del toro

Se D è il $4g$ -agone e $\pi: D \rightarrow D/\sim = \Sigma_g$

Siamo $A = D \cdot \partial D$, $B = D \cdot \{o\}$, dove o è un punto della parete interna di D

$$A' = \pi(A), B' = \pi(B)$$

Come per il toro, $A' \cong A$ che è contraibile, per cui $\pi_1(A') = \{1\}$.

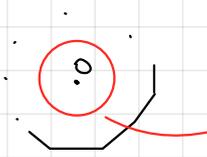
Inoltre B si retrae per deformazione su ∂D e B' si retrae per deformazione su $\pi(\partial D)$; poiché $\pi(\partial D)$ è il bouquet di $2g$ copie di S^1 (le immagini degli α_i e dei β_i), $\pi_1(B') = \pi_1(\pi(\partial D)) = F\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle = F_{2g}$ gruppo libero su $2g$ generatori.

$A' \cap B' \cong A \cap B \cong S^1$, il cui π_1 è \mathbb{Z}

Applicando Van Kampen, ottengo

$$\begin{array}{l} \pi_1(A' \cap B') = \mathbb{Z} \\ \begin{array}{l} \xrightarrow{(j_A)_*} \pi_1(A') = \{1\} \\ \xrightarrow{(j_B)_*} \pi_1(B') = F_{2g} \end{array} \end{array} \quad (j_A)_* \text{ è la mappa bundle}$$

Dove viene mandato un generatore di $\pi_1(A' \cap B')$ tramite $(j_B)_*$?



generatore di $\pi_1(A' \cap B')$, che è omotopo in B' all'immagine di ∂D percorso in senso antiorario, che in $\pi_1(B')$ rappresenta $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

Da qui, segue la tesi.

□

Vediamo ora $T_g \cong T_{g'} \iff g=g'$, così possiamo concludere che $\Sigma_g \cong \Sigma_{g'} \iff g=g'$ (risoluto non banale)

DEF. Sia G un gruppo.

Il rango di G è il minimo numero di generatori di G

È chiaramente un invariante di isomorfismo

proposizione Sia F_k il gruppo libero su k generatori.
Allora $\text{rk}(F_k) = k$

DIMOSTRAZIONE

Ovviamente F_k è generato da k elementi, per cui $\text{rk}(F_k) \leq k$.
Per vedere che servono davvero almeno k generatori, osserviamo che esiste un omomorfismo suriettivo $F_k \rightarrow \mathbb{Z}^k$

Basta mandare i k simboli dell'alfabeto di F_k nei k vettori della base canonica di \mathbb{R}^k , che generano \mathbb{Z}^k .

Poiché un omomorfismo suriettivo porta generatori in generatori, $\text{rk}(F_k) \geq \text{rk}(\mathbb{Z}^k)$

La tesi segue dal fatto che $\text{rk}(\mathbb{Z}^k) = k$ (in effetti è uguale), in quanto, se v_1, \dots, v_m generano \mathbb{Z}^k , $\text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, \dots, v_m) = \mathbb{R}^k$ per cui $m \geq k$ (algebra lineare). □

Fatto interessante: è falsissimo che, se $H < G$, $\text{rk}(H) < \text{rk}(G)$
(vero per gruppi abeliani)

Ad esempio, F_2 contiene sottogruppi isomorfi a $F_k \forall k \in \mathbb{N}$

(k parole "prese a caso" tipicamente generano un gruppo libero di rango k)

teorema $\text{rk}(I_g) = 2g$
In particolare $I_g \cong I_{g'} \iff g=g'$

DIMOSTRAZIONE

simile a quella del gruppo libero.

Per definizione, $\text{rk}(I_g) \leq 2g$ (ha una presentazione con $2g$ generatori)

Inoltre esiste un omomorfismo suriettivo $\varphi: I_g \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$

(basta mandare gli a_i e b_i nella base canonica di \mathbb{Z}^{2g} , e osservare che, poiché \mathbb{Z}^{2g} è abeliano, la relazione $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ viene sicuramente mandata a zero)

Donque $\text{rk}(I_g) \geq \text{rk}(\mathbb{Z}^{2g}) = 2g$ □

π_1 degli spazi proiettivi complessi

teorema $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{1\}$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su n

Se $n=0$, $\mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \{x\}$ è un punto, che è semplicemente connesso

Sopponiamo ora $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ semplicemente connesso e studiamo $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ con Van Kampen.

Sia $A = U_0 = \{[z_0 : \dots : z_{n+1}] \mid z_0 \neq 0\}$

Sappiamo che A è aperto e $A \cong \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$
che è semplicemente connesso

Come B pongi $B = \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \setminus \{[1:0:\dots:0]\}$ così che
 B sia aperto e $A \cup B = \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$

Devo vedere che $A \cap B$ è cpa, che B è cpa e chi è $\pi_1(B)$.

$A \cap B \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ (tramite l'omeo $A \cong \mathbb{C}^{n+1}$, il punto
 $[1:0:\dots:0]$ va in $(0, \dots, 0)$),

che è chiaramente cpa.

Vediamo ora che l'iperpiano $H_0 = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_{n+1}] \mid z_0 = 0\}$ è un
retratto per deformazione di B

Pongi $K : (\mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}\langle(1,0,\dots,0)\rangle) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}\langle(1,0,\dots,0)\rangle$
 $((z_0, z_1, \dots, z_{n+1}), t) \longmapsto (tz_0, z_1, \dots, z_{n+1})$

K è ben definita perché, se $(z_0, \dots, z_{n+1}) \notin \text{Span}\langle(1,0,\dots,0)\rangle$

$\exists z_i \neq 0$ con $i > 1$, per cui anche $(tz_0, z_1, \dots, z_{n+1}) \notin \text{Span}\langle(1,0,\dots,0)\rangle$

Inoltre $\forall \lambda \neq 0 \quad K(\lambda v, t) = \lambda K(v, t) \quad \forall v \in \mathbb{C}^{n+2} \setminus \text{Span}\langle(1,0,\dots,0)\rangle, \forall t \in [0,1]$

Dunque K passa al quoziente, definendo

$\bar{K} : B \times [0,1] \longrightarrow B$, che è una retrazione per deformazione di B

su H_0 , in quanto per costruzione $\bar{K}(p, 0) \in H_0 \quad \forall p \in B$

$\bar{K}(p, 1) = p \quad \forall p \in B, \quad \bar{K}(p, t) = p \quad \forall p \in H_0, \forall t \in [0,1]$

Osserviamo ora che $H_0 \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, per cui è cpa

e per ip. induttiva è semplicemente connesso, dunque

$\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ si esprime come unione di due aperti semplicemente

connessi con intersezione cpa, dunque è semplicemente connesso \square

Rivestimento universale

def. $p: E \rightarrow X$ è un rivestimento universale se è un rivestimento e E è semplicemente connesso (in particolare, E è cpa)

esempio (1) $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$
(2) $p: S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$

teorema Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento universale e sia $F = p^{-1}(x_0)$ una fibra di p . Allora
 $|F| = \deg p = |\pi_1(X, x_0)|$

DIMOSTRAZIONE

Fissiamo $\tilde{x}_0 \in F$, sia $\psi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$, $\psi([\alpha]) = \tilde{x}_0 \cdot [\alpha]$ (monodromia)

Vediamo che ψ è bigettiva.

Poiché E è cpa, l'azione di monodromia è transitiva, per cui ψ è surgettiva.

Per vedere che ψ è iniettiva, supponiamo $\psi([\alpha]) = \psi([\beta])$,

allora $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = \tilde{x}_0 \cdot [\beta] \Rightarrow \tilde{x}_0 \cdot [\alpha] \cdot [\beta]^{-1} = \tilde{x}_0$

$\Rightarrow [\alpha] \cdot [\beta]^{-1} \in \text{Stab}(\tilde{x}_0) = p_* \underbrace{(\pi_1(E, x_0))}_{\{1\}} = \pi_1(X, x_0)$

Donque $[\alpha] \cdot [\beta]^{-1} = \{1\}$ e $[\alpha] = [\beta]$ □

corollario $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } n=0 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n=1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$

DIMOSTRAZIONE

• $n=0 \Rightarrow \mathbb{P}^0(\mathbb{R}) = \{*\}$

• $n=1 \Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$

• $n \geq 2 \Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è rivestito da S^n con un rivestimento universale di grado 2, per cui $|\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))| = 2$

Donque $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ □

Sopponiamo che X ammetta un rivestimento universale $p: E \rightarrow X$

Allora $\forall x \in X \exists U$ intorno aperto di x ben rivestito t.c. $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$

Fissiamo V_{i_0} a caso, e sia $s: U \rightarrow V_{i_0}$ l'inversa continua di $p|_{V_{i_0}}: V_{i_0} \rightarrow U$

Posso considerare s anche a valori in E , $s: U \rightarrow E$.

Per costruzione $i: U \hookrightarrow X$ si fattorizza come $i = p \circ s$.

Dunque, se $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, si ha $i_* = p_* \circ s_*$.

Ma poiché E è semplicemente connesso, p_* e s_* sono gli omomorfismi banali, dunque lo è anche i_*

Dunque se X ammette un rivestimento universale, allora

$\forall x \in X \exists U$ intorno di x t.c. la mappa $i_*: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ indotta dall'inclusione è banale.

Questa condizione si esprime dicendo che X è **semilocalmente semplicemente connesso**

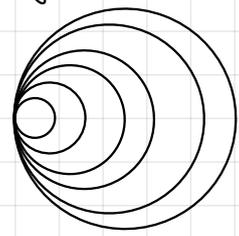
teorema X ammette un rivestimento universale se e solo se è semilocalmente semplicemente connesso

DIMOSTRAZIONE

(\Rightarrow) appena fatta

(\Leftarrow) costruzione esplicita di E come "spazio di cammini" (lunga, la omettiamo) □

esempio Spazio non semilocalmente semplicemente connesso: gli orecchini hawaiani



$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \text{circonferenza di centro } (1/n, 0) \text{ e raggio } 1/n$$

eserc. $\forall U$ intorno di $(0,0)$, la mappa $\pi_1(U, (0,0)) \rightarrow \pi_1(X, (0,0))$ indotta dall'inclusione non è banale

Per vedere l'unicità del rivestimento universale, mostriamo innanzitutto il seguente fondamentale teorema, che estende alcuni teoremi già visti sui coperti

teorema

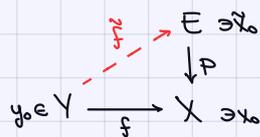
Sia $p: E \rightarrow X$ un rivestimento, e sia $f: Y \rightarrow X$ una mappa continua, Y cpa.

Siano $\tilde{x}_0 \in E, x_0 \in X, y_0 \in Y$ punti tali che $p(\tilde{x}_0) = x_0, f(y_0) = x_0$

Allora $\exists \tilde{f}: Y \rightarrow E$ t.c. $p \circ \tilde{f} = f, \tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ se e solo se

$$f_* (\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_* (\pi_1(E, \tilde{x}_0))$$

Quando tale \tilde{f} esiste, è unica.

**DIMOSTRAZIONE**

(\Rightarrow) facile: se $p \circ \tilde{f} = f$, allora $p_* \circ \tilde{f}_* = f_*$

$$\Rightarrow \text{Im } \tilde{f}_* \subseteq \text{Im } p_*$$

(\Leftarrow) Costruisco \tilde{f} . $\forall y \in Y$ scelgo un cammino $r_y \in \mathcal{R}(Y, y_0, y)$

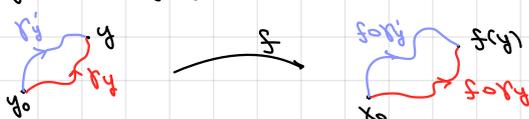
Il cammino $f \circ r_y$ connette $x_0 = f(y_0)$ a $f(y)$ in X

Ne prendo il sollevamento $\tilde{f} \circ r_y$ in E a partire da \tilde{x}_0

$$\text{e pongo } \tilde{f}(y) = \tilde{f} \circ r_y(1)$$

Il passaggio chiave è mostrare che \tilde{f} è ben definita, cioè non dipende dalla scelta del cammino r_y .

Sia $r'_y \in \mathcal{R}(Y, y_0, y)$ un altro cammino



Per costruzione, il cammino $(f \circ r_y) * (f \circ r'_y)^{-1}$

definisce un elemento di $f_* (\pi_1(Y, y_0))$ (è $f_* [r_y * r'_y^{-1}]$)

Per ipotesi $f_* (\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_* (\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = \text{Stab}(x_0)$ (monodromia)

Dunque $(f \circ r_y) * (f \circ r'_y)^{-1}$ si solleva a un cammino chiuso

in E che parte e arriva in \tilde{x}_0 . Ma questo significa

che $\tilde{f} \circ r_y$ e $\tilde{f} \circ r'_y$ hanno lo stesso punto finale,

che dà la buona definizione di \tilde{f} .

A questo punto è ovvio che $p \circ \tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ (con $r_{y_0} = c_{y_0}$)

La continuità di \tilde{f} segue (in maniera tecnica) da quella di f e dalla naturalezza della costruzione di \tilde{f} □

Automorfismi di rivestimento

Def. Fissiamo uno spazio X e siano $p_1: E_1 \rightarrow X, p_2: E_2 \rightarrow X$ due rivestimenti.

Un **morfismo** tra p_1 e p_2 è una mappa continua

$$\varphi: E_1 \rightarrow E_2 \text{ t.c. } p_2 \circ \varphi = p_1$$

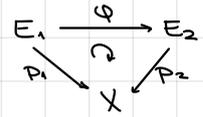
φ è un **isomorfismo** se $\exists \varphi^{-1}: E_2 \rightarrow E_1$ morfismo di rivestimento

$$\text{con } \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}_{E_2} \text{ e } \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}_{E_1}$$

φ si chiama **automorfismo** se $(E_1, p_1) = (E_2, p_2)$ e φ è un isomorfismo.

In tal caso $\varphi \in \text{Aut}(p)$, dove $p = p_1 = p_2$

(a volte si scrive $\varphi \in \text{Aut}(E)$ quando la mappa è ovvia)



esempio $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \quad p(t) = e^{2\pi i t}$

Ogni traslazione intera $\varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_n(t) = t+n$ è un automorfismo di p (vedremo che sono tutti e soli gli automorfismi di $p, \text{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$)

proposizione Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento connesso,

e siano $x_0 \in X$ e $F = p^{-1}(x_0)$. Allora

(1) $\text{Aut}(p)$ agisce su F (a sinistra)

(2) l'azione di $\text{Aut}(p)$ e quella di monodromia commutano,

cioè $\forall \varphi \in \text{Aut}(p), \forall \alpha \in \pi_1(X, x_0), \forall \tilde{x}_0 \in F$

$$\varphi(\tilde{x}_0 \cdot \alpha) = \varphi(\tilde{x}_0) \cdot \alpha$$

DIMOSTRAZIONE

(1) ovvio: se $\tilde{x}_0 \in F, p(\varphi(\tilde{x}_0)) = p(\tilde{x}_0) = x_0$, dunque $p(\tilde{x}_0) \in F$

(2) sia γ un rappresentante di α . Allora $\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}$ è un

cammino continuo che solleva γ (in quanto $p \circ (\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}) = (p \circ \varphi) \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0} = p \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0} = \gamma$ a partire da $\varphi(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(0)) = \varphi(\tilde{x}_0)$)

Dunque, per unicità dei sollevamenti, $\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0} = \tilde{\gamma}_{\varphi(\tilde{x}_0)}$, per cui

$\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\gamma}_{\varphi(\tilde{x}_0)}(1)$. Ma questo vuol dire che

$$\varphi(\tilde{x}_0 \cdot \alpha) = \varphi(\tilde{x}_0) \cdot \alpha$$

□

proposizione Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento connesso.

Allora $\text{Aut}(p)$ agisce in maniera propriamente discontinua su E . In particolare, l'azione è libera

DIMOSTRAZIONE

Sia $\tilde{x}_0 \in E$. Per definizione di rivestimento, $\exists U$ intorno di $p(\tilde{x}_0)$

ben rivestito, con $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$, con $p|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ omeo, V_i aperto.

Sia \tilde{z} t.c. $\tilde{z}_0 \in V_{i_0}$. Per concludere, basta vedere che, se $\varphi \in \text{Aut}(p)$,

e $\varphi(V_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$, allora $\varphi = \text{Id}_E$

Sia $z \in \varphi(V_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$. Allora $\varphi^{-1}(z) \in V_{i_0}$ e $p \circ \varphi^{-1}(z) = p(z)$.

Ma $z, \varphi^{-1}(z) \in V_{i_0}$ e $p|_{V_{i_0}}$ è iniettiva, per cui $z = \varphi^{-1}(z)$.

Ora φ^{-1} , essendo $\varphi^{-1} \in \text{Aut}(p)$, è un sollevamento di p

Dunque $\varphi^{-1} \circ \text{Id}_E$ sono due sollevamenti di p che coincidono in z .

Per unicità dei sollevamenti, $\varphi^{-1} = \text{Id}_E$, da cui $\varphi = \text{Id}_E$

□

teorema Sia G un gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua su E , e sia $p: E \rightarrow E/G$ la proiezione. Allora p è rivestimento e $\text{Aut}(p) = G$.

DIMOSTRAZIONE

È ovvio che $G = \text{Aut}(p)$, in quanto $\forall g \in G, \forall x \in E \quad p(gx) = p(x)$,

cioè $p \circ g = p$.

Viceversa, sia $\varphi \in \text{Aut}(p)$. Scelto $\tilde{x} \in E$, $p \circ \varphi(\tilde{x}) = p(\tilde{x})$,

per cui $\exists g \in G$ con $\varphi(\tilde{x}) = g(\tilde{x})$.

Ora, già sappiamo che $g \in \text{Aut}(p)$, per cui $\varphi^{-1} \circ g \in \text{Aut}(p)$

e $\varphi^{-1}(g(\tilde{x})) = \tilde{x}$. Poiché l'azione di $\text{Aut}(p)$ è libera,

segue $\varphi^{-1} \circ g = \text{Id}$, cioè $\varphi = g$ e $\varphi \in G$. \square

Tutti i rivestimenti visti finora sono della forma $E \rightarrow E/G$ o equivalentemente $E \rightarrow E/\text{Aut}(p)$.

Ma non tutti i rivestimenti provengono da azioni di gruppo.

D'ora in poi tutti i rivestimenti saranno connessi per archi.

def. Un rivestimento si dice **regolare** (o **normale** o di **Galois**) se $\forall x \in X \quad \text{Aut}(p)$ agisce transitivamente sulla fibra $F = p^{-1}(x)$.

Se $p: E \rightarrow E/G$, con G gruppo, allora $\text{Aut}(p) = G$

agisce transitivamente sulle fibre per definizione, per cui è regolare.

Viceversa, se p è regolare, per definizione $X = E/\text{Aut}(p)$.

proposizione Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento, sia $x_0 \in X$, $F = p^{-1}(x_0)$. Allora sono fatti equivalenti:

- (1) $p_x(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = p_x(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) \quad \forall \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F$
- (2) $p_x(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \triangleleft \pi_1(X, x_0) \quad \forall \tilde{x}_0 \in F$
- (3) $\text{Aut}(p)$ agisce transitivamente su F .

DIMOSTRAZIONE

(1) \Leftrightarrow (2) segue dal fatto che $p_x(\pi_1(E, \tilde{x}_i)) = \text{Stab}(\tilde{x}_i)$

per l'azione di monodromia e che, al variare di $\tilde{x}_i \in F$,

i sottogruppi $\text{Stab}(\tilde{x}_i)$ sono tutti e soli i coniugati di $\text{Stab}(\tilde{x}_0)$.

(segue dal fatto che F è un'orbita della monodromia,

perché E è connesso per archi e perciò l'azione è transitiva)

(1) \Rightarrow (3) Dati $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in E$, considero il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & (E, \tilde{x}_1) & \\ & \downarrow p & \\ (E, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{p} & (X, x_0) \end{array}$$

Per il teorema di sollevamento, $\exists \varphi$ che fa commutare il diagramma $\iff p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1))$, che vale per (1). Dunque tale φ fa commutare il diagramma e $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Tale φ è l'elemento di $\text{Aut}(p)$ cercato (è invertibile perché posso scambiare \tilde{x}_0 e \tilde{x}_1)

(3) \Rightarrow (1) Dati $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in E$, poiché $\varphi \in \text{Aut}(p)$ con $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$,

$$\text{si ha } p \circ \varphi = p \implies p_* \circ \varphi_* = p_*$$

$$\implies p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1))$$

Utilizzando φ^{-1} , si trova l'inclusione opposta □

Lemma Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento connesso.

Se $\exists \tilde{x}_0 \in E$ t.c. $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ è normale, allora $\forall \tilde{x} \in E$ $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \subseteq \pi_1(X, p(\tilde{x}))$ è normale

DIMOSTRAZIONE

Segue facilmente dalla forma esplicita dell'isomorfismo

$$f_{\#}: \pi_1(E, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(E, \tilde{x}_0) \text{ con } \gamma \in \Omega(E, \tilde{x}_0, \tilde{x})$$

Si ha infatti il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, \tilde{x}) & \xleftarrow{f_{\#}} & \pi_1(E, \tilde{x}_0) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, p(\tilde{x})) & \xleftarrow{(p \circ f_{\#})_*} & \pi_1(X, p(\tilde{x}_0)) \end{array}$$

□

Corollario Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento.

Sono fatti equivalenti

(1) $\exists \tilde{x}_0 \in E$ $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) \triangleleft \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$

(2) $\forall \tilde{x} \in E$ $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) \triangleleft \pi_1(X, p(\tilde{x}))$

(3) $\exists x_0 \in X$ $\text{Aut}(p)$ agisce transitivamente su $p^{-1}(x_0)$

(4) $\forall x_0 \in X$ $\text{Aut}(p)$ agisce transitivamente su $p^{-1}(x_0)$

Fatti sei rivestimenti che discendono (quasi) immediatamente:

1. **UNICITA'** del rivestimento universale a meno di isomorfismo:

se E_1, E_2 sono due rivestimenti universali di X , poiché

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1)) = \{1\} \quad (E_1 \text{ è semplicemente connesso}),$$

p_1 si solleva: $\exists \varphi: E_1 \rightarrow E_2$ t.c. $p_2 \circ \varphi = p_1$.



Analogamente $\exists \psi: E_2 \rightarrow E_1$ t.c. $p_1 \circ \psi = p_2$

e posso anche chiedere $\psi(\varphi(x_0)) = x_0$ dopo avere fissato $x_0 \in E_1$ a caso.

Ora $\varphi \circ \psi$ e $\psi \circ \varphi$ "sollevano" l'identità di X e hanno un punto fisso.

Per unicità sono l'identità di E_1 e E_2 rispettivamente, per cui

E_1 e E_2 sono isomorfi.

2. $p: E \rightarrow X$ è regolare $\iff \exists G$ gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua su E in modo che $X = E/G$ e $p: E \rightarrow E/G$ sia la proiezione al quoziente. Si ha poi $G = \text{Aut}(p)$

Abbiamo visto che questo capita se e solo se $p_*(\pi_1(E, x_0))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0) \forall x_0 \in E$ (anzi, se $\exists x_0 \in E$ per cui la condizione vale, allora vale $\forall x_0 \in E$)

3. **teorema** C'è una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \{\text{rivestimenti regolari di } X\} & \longleftrightarrow & \{\text{sottogruppi normali di } \pi_1(X)\} \\ \text{a meno di isomorfismo} & & \\ p: E \rightarrow X & \longmapsto & p_*(\pi_1(E)) \\ \tilde{X}/H & \longleftrightarrow & H \end{array}$$

dove \tilde{X} è il sollevamento universale di X e $H < \pi_1(X) = \text{Aut}(\tilde{X})$

- Posso ignorare i punti base perché $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ con un isomorfismo canonico a meno di coniugio e i sottogruppi normali non risentono del coniugio.
- Affinché quel che ho scritto sia vero, deve esistere \tilde{X} e cioè X deve essere localmente semplicemente connesso.

DIMOSTRAZIONE

Le due mappe sono davvero ben definite e una è l'inversa dell'altra.

FATTO: $\alpha \in P_*(\pi_1(E))$, p regolare, se e solo se X si solleva ad un lazo chiuso (a partire da qualsiasi punto base della fibra). Se p non è regolare, $\tilde{\alpha}$ può essere chiuso oppure no a seconda del punto iniziale. Infatti $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ è chiuso $\iff \tilde{x}_0 \cdot \alpha = \tilde{x}_0 \iff \alpha \in \text{Stab}(\tilde{x}_0) = P_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$

teorema Sia $p: E \rightarrow X$ rivestimento regolare. Allora

$$\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X) / P_*(\pi_1(E))$$

Oss I punti base non servono proprio perché p è regolare

DIMOSTRAZIONE

Costruisco $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}(p)$ così.

Fissato $\tilde{x}_0 \in F = p^{-1}(x_0)$, $\forall \alpha \in \pi_1(X, x_0)$, poiché $\text{Aut}(p)$ agisce transitivamente su F \exists automorfismo $\varphi(\alpha)$ tale che $\tilde{x}_0 \cdot \alpha = \varphi(\alpha)(\tilde{x}_0)$.

Tale $\varphi(\alpha)$ è unico perché $\text{Aut}(p)$ agisce liberamente.

Per concludere devo vedere che φ è omomorfismo, è surgettivo e $\ker \varphi = P_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$

• φ omomorfismo: poiché l'azione di $\text{Aut}(p)$ è libera, basta vedere che $\varphi(\alpha \cdot \beta)(\tilde{x}_0) = \varphi(\alpha)(\varphi(\beta)(\tilde{x}_0))$.

$$\varphi(\alpha)(\varphi(\beta)(\tilde{x}_0)) = \varphi(\alpha)(\tilde{x}_0 \cdot \beta) = (\varphi(\alpha)(\tilde{x}_0)) \cdot \beta = (\tilde{x}_0 \cdot \alpha) \cdot \beta = \tilde{x}_0 \cdot (\alpha \cdot \beta) = \varphi(\alpha \cdot \beta)(\tilde{x}_0)$$

automorfismi e monodromia commutano

• φ surgettivo: $\forall \tilde{x}_1 \in F$, poiché E è cpa, $\exists \alpha + c$. $\tilde{x}_0 \cdot \alpha = \tilde{x}_1$, cioè $\varphi(\alpha)(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.

Donque $\text{Im} \varphi$ agisce transitivamente su F , per cui $\text{Im} \varphi = \text{Aut}(p)$ (sempre perché l'azione di $\text{Aut}(p)$ è libera)

• $\ker \varphi$: $\varphi = \text{Id} \iff$ (l'azione di $\text{Aut}(p)$ è libera) $\varphi(\alpha)(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$
 $\iff \alpha \in \text{Stab}(\tilde{x}_0) = P_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$

□

Oss Se E è cpa, la monodromia è transitiva e per il lemma orbita-stabilizzatore:

$$\deg p = |\text{Orb}(\tilde{x}_0)| = [G : \text{Stab}(\tilde{x}_0)] = [\pi_1(X, x_0) : P_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))]$$

Quindi, un rivestimento regolare p di grado d per Galois corrisponde a un sottogruppo normale di indice d in $\pi_1(X)$

(che corrisponde al ker di un omomorfismo surgettivo con immagine di cardinalità d)

ANALISI COMPLESSA

Consideriamo \mathbb{C} con la topologia euclidea indotta dall'identificare \mathbb{C} con \mathbb{R}^2

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \rightsquigarrow (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Quindi una base di aperti in \mathbb{C} è data da

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

Studieremo funzioni $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ oppure $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$

Le nozioni di limiti e continuità (che sono topologiche) coincidono con quelle per funzioni $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

Richiamo: $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile in $x_0 \in U$ se esiste un'applicazione lineare L t.c. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$
(\mathbb{R} -lineare)

$$\text{ovvero } f(x_0+h) - f(x_0) = L(h) + o(\|h\|)$$

Se esiste tale L , allora è unica e la indico con df_{x_0} , il differenziale di f in x_0

In particolare:

(a) $df_{x_0}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

(b) se $f = (f_1, \dots, f_n)$, allora $df_{x_0} = (df_1|_{x_0}, \dots, df_n|_{x_0})$

(c) se $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabili in x_0 , allora

$$d(f \cdot g)|_{x_0} = f \cdot dg_{x_0} + df_{x_0} \cdot g \quad (\text{quindi } f \cdot g \text{ è differenziabile})$$

(d) se $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f(U) \subseteq V$, f differenziabile in x_0 , g differenziabile in $f(x_0)$, allora

$$d(g \circ f)|_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}$$

NOTAZIONE se $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, allora scivolo

$$f(x) = \operatorname{Re}(f)(x) + i \operatorname{Im}(f)(x) \quad \text{con } \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f): U \rightarrow \mathbb{R}$$

Definisco $\bar{f}: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ come

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$$

Oss Ho che $\bar{f} = \varphi \circ f$ con $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(z) = \bar{z}$

Osservo che φ non è \mathbb{C} -lineare:

$$\text{se } \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z} = \bar{\lambda} \varphi(z)$$

Quindi φ è \mathbb{C} -antilineare

Lemma Siano $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ differenziabili in x_0 . Allora

(1) \bar{f} è differenziabile in x_0 e $d\bar{f}_{x_0} = \overline{df_{x_0}}$

(2) $f \cdot g$ è differenziabile in x_0 e $d(f \cdot g)_{x_0} = f dg_{x_0} + df_{x_0} \cdot g$

(3) Se $f(x_0) \neq 0$, allora $\frac{1}{f}$ è differenziabile in x_0
e $d\left(\frac{1}{f}\right)_{x_0} = -\frac{df_{x_0}}{f^2(x_0)}$

DIMOSTRAZIONE

(1) Scrivo $\bar{f} = \varphi \circ f$. Siccome φ è \mathbb{R} -lineare, è differenziabile (su tutto \mathbb{C})
e $d\varphi_{f(x_0)} = \varphi$

Per la proprietà (c), $d\bar{f}_{x_0} = d\varphi_{f(x_0)} \cdot df_{x_0} = \varphi \circ df_{x_0} = \overline{df_{x_0}}$

(2) Calcolo $(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0) = f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) =$
 $= f(x_0+h)(g(x_0+h) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x_0+h) - f(x_0)) = f(x_0+h)(dg_{x_0}(h) + o(\|h\|)) + g(x_0)(df_{x_0}(h) + o(\|h\|)) =$
 $= (f(x_0) + o(\|h\|))(dg_{x_0}(h) + o(\|h\|)) + g(x_0)(df_{x_0}(h) + o(\|h\|)) =$
 $= f(x_0)dg_{x_0}(h) + g(x_0)df_{x_0}(h) + o(\|h\|)$

Quindi $f \cdot g$ è differenziabile in x_0

(3) Osservo che $\frac{1}{f} = \frac{\bar{f}}{|f|^2}$, per (1) e (2), $\frac{1}{f}$ è differenziabile in x_0 . □

Supponiamo ora $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenziabile in $z_0 \in U$

È naturale scegliere come base per $\{g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, g \text{ } \mathbb{R}\text{-lineare}\}$

(spazio vettoriale su \mathbb{C}) dx, dy definite da $\begin{cases} dx(i) = 1, dx(-i) = 0 \\ dy(i) = 0, dy(-i) = 1 \end{cases}$

Però né dx né dy è \mathbb{C} -lineare

Definisco: $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$

Osservo che, per $\lambda \in \mathbb{C}$

$$dz(\lambda z_0) = (\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Re}(z_0) - \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Im}(z_0)) + i(\operatorname{Re}(\lambda)\operatorname{Im}(z_0) + \operatorname{Im}(\lambda)\operatorname{Re}(z_0)) =$$

$$= (\operatorname{Re}(\lambda) + i\operatorname{Im}(\lambda))(\operatorname{Re}(z_0) + i\operatorname{Im}(z_0)) = \lambda z_0$$

Quindi dz è \mathbb{C} -lineare

Invece $d\bar{z}(\lambda z_0) = \bar{\lambda} z_0$, quindi $d\bar{z}$ è \mathbb{C} -antilineare

Si verifica che $\{g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, g \text{ } \mathbb{R}\text{-lineare}\} = \{g \text{ } \mathbb{C}\text{-lineare}\} \oplus \{g \text{ } \mathbb{C}\text{-antilineare}\}$

Scrivo $df_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) dy$ con $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} + i \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}$, analogo per $\frac{\partial f}{\partial y}$

Scrivono df invece di df_{z_0} per indicare df_{z_0} in qualsiasi punto

Quindi ho $\begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \end{cases}$ da cui

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial z}} dz + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} d\bar{z}$$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial z}$ rappresenta la parte \mathbb{C} -lineare di df

Funzioni ologomorfe

Sono anche dette derivabili in senso complesso.

Def. Una funzione $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è ologomorfa in $z_0 \in U$ se esiste finito

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

Diciamo che f è ologomorfa se è ologomorfa in $z_0 \forall z_0 \in U$

Oss. La funzione $\phi(z) = \bar{z}$ non è ologomorfa in nessun punto:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} \begin{cases} = 1 & \text{se } h \rightarrow 0 \text{ lungo l'asse reale} \\ = -1 & \text{se } h \rightarrow 0 \text{ lungo l'asse immaginario} \end{cases}$$

quindi tale limite non esiste

teorema Sia $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (1) f è ologomorfa in z_0
- (2) f è differenziabile in z_0 e df_{z_0} è \mathbb{C} -lineare
- (3) f è differenziabile in z_0 e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$
- (4) f è differenziabile in z_0 e

$$\begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}(z_0) \end{cases} \quad (\text{equazioni di Cauchy-Riemann})$$

DIMOSTRAZIONE

Inizio mostrando che f è ologomorfa in z_0

$$(*) \iff f \text{ è differenziabile in } z_0 \text{ e } df_{z_0}(z) = \lambda z \text{ per } \lambda \in \mathbb{C}$$

In fatti: f ologomorfa in $z_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$ ↗ applicazione \mathbb{R} -lineare

$$\iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - f'(z_0)h|}{|h|} = 0$$

$$\iff f \text{ diff. in } z_0 \text{ e } df_{z_0}(h) = \lambda h$$

(1) \Rightarrow (2) segue da (*) che f è diff. in z_0 e $df_{z_0}(z) = \lambda z$, che è \mathbb{C} -lineare

(2) \Rightarrow (1) se df_{z_0} è \mathbb{C} -lineare, allora $df_{z_0}(z) = \lambda z$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$

(tutte le applicazioni \mathbb{C} -lineari hanno questa forma, poiché $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^* = 1$)

Concludo con (*).

(2) \iff (3) Ho che $df_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) d\bar{z}$ è \mathbb{C} -lineare

$$\iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

(3) \iff (4) Sia $a = \operatorname{Re}(f)$, $b = \operatorname{Im}(f)$. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \iff \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) = 0$$

$$\iff \frac{\partial a}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial b}{\partial x}(z_0) + i \left(\frac{\partial a}{\partial y}(z_0) + i \frac{\partial b}{\partial y}(z_0) \right) = 0$$

$$\iff \left(\frac{\partial a}{\partial x}(z_0) - \frac{\partial b}{\partial y}(z_0) \right) + i \left(\frac{\partial a}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial b}{\partial x}(z_0) \right) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}(z_0) \end{cases}$$

□

Funzioni analitiche

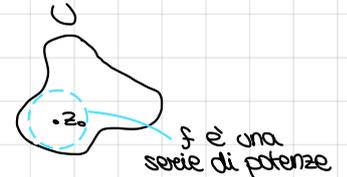
Utilizziamo serie di potenze (a coefficienti complessi) per costruire funzioni.

DEF. Una **serie di potenze** è una serie della forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ (serie di potenze centrata in z_0) con $a_n \in \mathbb{C}$

Oss Esattamente come nel caso reale esiste $R \in [0, +\infty]$ tale che

- la serie converge assolutamente $\forall z \in B(z_0, R)$
- la serie non converge $\forall z: |z-z_0| > R$

DEF. Una funzione $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è **analitica** se può essere rappresentata come serie di potenze centrata in $z_0, \forall z_0 \in U$, ovvero $\forall z_0 \in U \exists R' : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R')$



Mostriamo che se f è esprimibile come serie di potenze in $B(z_0, R)$, allora f è analitica.

teorema Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R)$. Allora f è analitica.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo $z_0=0$ Voglio mostrare che $\forall \bar{z} \in B(0, R)$, f è esprimibile come serie di potenze centrata in \bar{z} in $B(\bar{z}, R')$ per qualche R' ($B(\bar{z}, R') = B(0, R)$)

Fisso $\bar{z} \in B(0, R)$. Definiamo $R' = R - |\bar{z}|$. Quindi $B(\bar{z}, R') = B(0, R)$.

Fisso $z \in B(\bar{z}, R')$, quindi $z = \bar{z} + w$ con $|w| < R'$. Siccome $|\bar{z}| + |w| < R$, ho che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (|\bar{z}| + |w|)^n \text{ converge} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |\bar{z}|^{n-i} |w|^i \text{ converge assolutamente}$$

Se una serie di potenze converge assolutamente, allora il limite delle somme parziali non dipende dall'ordine degli elementi della successione

(se sommo prima su n e poi su i o viceversa ottengo lo stesso risultato)

$$\begin{aligned} \bullet \text{ sommo prima su } i \text{ poi su } n: & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |\bar{z}|^{n-i} |w|^i \\ \bullet \text{ sommo prima su } n \text{ poi su } i: & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |\bar{z}|^{n-i} |w|^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=i}^{+\infty} a_n \binom{n}{i} |\bar{z}|^{n-i}}_{b_i} |w|^i = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i (z-\bar{z})^i \end{aligned}$$

Quindi ho espresso la serie di potenze come una serie centrata in \bar{z} .

Concludo mostrando che $b_i \in \mathbb{C}$, ovvero $\sum_{n=i}^{+\infty} a_n \binom{n}{i} |\bar{z}|^{n-i}$ converge.

Calcolo il suo raggio di convergenza:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n \binom{n}{i}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n \frac{n!}{i!}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{R}$$

La serie di potenze iniziale so convergere in un disco di raggio R , dunque il suo raggio di convergenza è almeno R .

Quindi $\sum_{n=i}^{+\infty} a_n \binom{n}{i} z^{n-i}$ converge $\forall z \in B(0, R)$, quindi converge in \bar{z} , da cui $b_i \in \mathbb{C}$.

□

Oss Ci servirà ricordare $b_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$

Mostriamo che le serie di potenze sono funzioni oloedomorfe.

teorema Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R)$.
Allora f è oloedomorfa in $B(z_0, R)$ e $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che $z_0 = 0$. Mostro che $f'(z)$ esiste e coincide con $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1} \quad \forall z \in B(0, R)$

Caso 1: $z = 0$. Calcolo

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - a_0}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}, \text{ che ha lo stesso raggio di convergenza di } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ quindi } \geq R.$$

$$\text{Quindi } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1} = a_1$$

in $B(0, R)$ la serie è continua

Quindi f è oloedomorfa in 0 e $f'(0) = a_1$

(che è il risultato di $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ calcolato in 0)

Caso 2. $z \neq 0$. Per il teorema precedente esiste un raggio R' t.c.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z)^n \quad \forall z \in B(z, R') = B(0, R)$$

Per il caso 1 f è oloedomorfa in z e $f'(z) = b_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$

□

corollario Se $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica allora f è oloedomorfa su U .
Inoltre se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, allora $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$

Oss Siccome $f^{(n)}(z_0)$ è univocamente determinata da a_n ,
l'espressione di f come serie centrata in z_0 è unica.

Oss Abbiamo scoperto che se f è analitica allora $f \in C^\infty$,
ovvero esistono le derivate di qualsiasi ordine.

Supponiamo ora $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica.

DEF Diciamo che f ha ordine di annullamento (o ordine di zero)

$n \in \mathbb{N}$ in $z_0 \in U$ se

(i) $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k < n$

(ii) $f^{(n)}(z_0) \neq 0$

Se $f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ diciamo che ha ordine ∞ in z_0 .

Oss f ha ordine 0 in $z_0 \iff f(z_0) \neq 0$

Lemma Sia $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitica. Sono fatti equivalenti:

(i) f ha ordine n_0 in $z_0 \in U$

(ii) $\exists V$ aperto, $z_0 \in V \subseteq U$ t.c. $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z) \quad \forall z \in V$
 con g analitica su V e $g(z_0) \neq 0$

DIMOSTRAZIONE

(i) \Rightarrow (ii): f analitica $\Rightarrow \exists R: f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R)$

f ha ordine n_0 in $z_0 \Rightarrow f^{(i)}(z_0) = 0 \quad \forall i < n_0, f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow a_i = \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} = 0 \quad \forall i < n_0$ e $a_{n_0} \neq 0$. Quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n - n_0}$$

Si come $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n - n_0}$ ha lo stesso raggio di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{che \u00e8 almeno } R), \text{ ho che } g(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n - n_0} \quad \forall z \in B(z_0, R)$$

e quindi $g(z)$ \u00e8 analitica su $B(z_0, R)$ e $g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$

(ii) \Rightarrow (i) so che $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$ con g analitica su $V \ni z_0$ e $g(z_0) \neq 0$.

g analitica $\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R)$ con $b_0 \neq 0$.

$$\text{Quindi } f(z) = (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\text{con } a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n < n_0 \\ b_{n - n_0} & \text{se } n \geq n_0 \end{cases}$$

$$\text{Quindi } f^{(n)}(z_0) = n! a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n < n_0 \\ n_0! b_0 \neq 0 & \text{se } n = n_0 \end{cases}$$

Quindi f ha ordine n_0 in z_0 . □

Oss Se f ha ordine $+\infty$ in $z_0 \in U$ allora tutte le derivate si annullano in z_0

Quindi se $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ allora $a_n = 0 \quad \forall n$. Quindi $f(z) = 0 \quad \forall z \in B(z_0, R)$

Mostriamo che se $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ \u00e8 analitica su U connesso allora

se $f|_V \equiv 0$ per qualche aperto $V \subseteq U$, allora $f \equiv 0$ su tutto U .

Lemma Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ analitica e sia $Z = f^{-1}(0)$ l'insieme degli zeri di f . Sia $z_0 \in Z$. Allora o z_0 è isolato in Z , oppure $z_0 \in \overset{\circ}{Z}$.

DIMOSTRAZIONE

Per una proprietà delle funzioni analitiche, $\exists W$ aperto, $z_0 \in W$ e $f(z) = 0 \forall z \in W$ (se l'ordine di 0 in z_0 è ∞)
o $f(z) = (z - z_0)^n g(z) \forall z \in W$ con $g(z) \neq 0$ e g analitica su W (se l'ordine di 0 in z_0 è n)

Nel primo caso $W = Z$ e perciò $z_0 \in \overset{\circ}{Z}$.

Nel secondo caso, poiché g è continua e $g(z_0) \neq 0$,

\exists aperto $W' \subseteq W$ t.c. $g(z) \neq 0 \forall z \in W'$. Ma allora

$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \neq 0 \forall z \in W'$, e perciò z_0 è uno zero isolato \square

teorema Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso e sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Se $Z = f^{-1}(0)$ ha un punto di accumulazione $\bar{z} \in U$, allora $f(z) = 0 \forall z \in U$

DIMOSTRAZIONE

Basta dimostrare che $\overset{\circ}{Z}$ è aperto, chiuso, non vuoto.

Notiamo che, per continuità di f , $f(\bar{z}) = 0$, essendo

$f|_Z = 0$ e $\bar{z} \in \bar{Z}$, e per il lemma precedente $\bar{z} \in \overset{\circ}{Z}$, dunque $\overset{\circ}{Z} \neq \emptyset$.

Inoltre $\overset{\circ}{Z}$ è aperta per definizione.

Per vedere che $\overset{\circ}{Z}$ è anche chiusa, osserviamo che,

se $z_0 \in \bar{\overset{\circ}{Z}} \setminus \overset{\circ}{Z}$, allora $f(z_0) = 0$ per continuità di f (f si annulla su $\overset{\circ}{Z}$ e dunque anche su $\bar{\overset{\circ}{Z}}$) e z_0 è un punto di accumulazione di $\overset{\circ}{Z}$, dunque a maggior ragione di Z .

Per il lemma precedente $z_0 \in \overset{\circ}{Z}$.

Quindi $\bar{\overset{\circ}{Z}} = \overset{\circ}{Z}$, cioè $\overset{\circ}{Z}$ è chiusa. \square

corollario $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ con U connesso.

Se $f|_V = g|_V$ dove $V \subseteq U$ ha punti di accumulazione (ad esempio V aperto), allora $f = g$ su tutto U .

DIMOSTRAZIONE

Basta applicare il teorema a $f - g$. \square

Esponenziale complesso

E' la mappa $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = 0$, questa serie di potenze converge assolutamente su tutto \mathbb{C} ad una funzione analitica

Fatti importanti

(1) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Si dimostra ricordando che le serie assolutamente convergenti, sono anche incondizionatamente convergenti, per cui

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \frac{z^n w^m}{n! m!} = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{n+m=N} \frac{z^n w^m}{n! m!} = \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} z^n w^{N-n} = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{N!} (z+w)^N = e^{z+w} \end{aligned}$$

(2) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Infatti $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$

D'ora in poi indicheremo con \exp la mappa $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(3) Se $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

in quanto $e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \cos y + i \sin y$ (separando indici pari e dispari e usando Taylor reale)

(4) $|e^{x+iy}| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x$

cioè $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$

(5) $\exp' = \exp$

in quanto la serie derivata di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ è $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ e abbiamo mostrato che si può "derivare per serie"

(6) $e^z = e^w \iff e^{z-w} = 1 \iff$ il modulo e^{z-w} è 1 e $(\cos(\operatorname{Im}(z-w)) + i \sin(\operatorname{Im}(z-w))) = 1$

$\iff \operatorname{Re}(z-w) = 0, \operatorname{Im}(z-w) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff z-w = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$

(7) $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è surgettivo.

Dato $z \neq 0$, lo posso scrivere in coordinate polari come $z = R e^{i\theta}, R > 0$

da cui $z = \exp(\log R + i\theta)$

↳ logaritmo reale

(8) **proposizione** $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ è un rivestimento

DIMOSTRAZIONE

Se identifichiamo \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 ($x+iy \leftrightarrow (x, y)$)

e \mathbb{C}^* con $(0, +\infty) \times S^1$ ($z \leftrightarrow (|z|, \frac{z}{|z|})$), abbiamo

$$\exp: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty) \times S^1$$

$$(x, y) \longmapsto (e^x, (\cos y, \sin y))$$

che è il prodotto dell'omeomorfismo $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

e del rivestimento universale $\mathbb{R} \rightarrow S^1$.

È immediato verificare che omeo \times rivestimento è rivestimento □

Logaritmo complesso

l'esponenziale reale $\mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è biiettivo

e ha un'inversa continua $\log: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Vorremmo invertire $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Ovviamente non è possibile

poiché \exp non è iniettiva, ma potrei almeno cercare un'inversa destra

$$L: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \exp \circ L = \text{id}_{\mathbb{C}^*}$$

Una tale inversa insiemistica esiste, ma noi la vogliamo (almeno) continua.

Def. $U \subseteq \mathbb{C}^*$ aperto.

Una **brancha del logaritmo su U** è una funzione continua

$$L: U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \exp(L(z)) = z \quad \forall z \in U$$

teorema $U \subseteq \mathbb{C}^*$ aperto connesso.

Allora esiste una brancha del logaritmo definita su U

$$\iff i_*: \pi_1(U) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$$

(ad esempio se U è semplicemente connesso)

Due branche diverse differiscono per una costante $2\pi i \cdot k$

DIMOSTRAZIONE

Una brancha è esattamente un sollevamento

dell'inclusione rispetto al rivestimento \exp

Poiché \mathbb{C} è semplicemente connesso, sappiamo

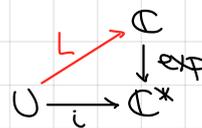
che tale sollevamento esiste $\iff i_*(\pi_1(U)) = \{1\}$

Se L_1 e L_2 sono due branche del logaritmo, allora

$$\exp(L_1(z)) = \exp(L_2(z)) \quad \forall z \in U, \text{ da cui } L_1(z) - L_2(z) \in 2\pi i \mathbb{Z} \quad \forall z \in U.$$

Ma $2\pi i \cdot \mathbb{Z}$ è discreto, $L_1 - L_2$ è continua e U è connesso,

per cui $L_1 - L_2$ è costante



□

corollario Non esiste una brancha del logaritmo definita su \mathbb{C}^*

(Non c'è un modo continuo di definire l'argomento di un numero complesso su tutto \mathbb{C}^*)

DEF la branca principale del logaritmo è
il logaritmo $L: H \rightarrow \mathbb{C}$
dove $H = \mathbb{C}^* \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$
e $L(z) = \log(|z|) + i \operatorname{arg}(z)$ con $\operatorname{arg}(z) \in (-\pi, \pi)$

D'ora in poi con L indicheremo tale branca principale

proposizione le branche del logaritmo sono tutte funzioni oloedomorfe

DIMOSTRAZIONE

Sia $L: U \rightarrow \mathbb{C}$ una branca del logaritmo.

Sappiamo che L è continua. Sia $y_0 \in U$, e sia $z_0 = L(y_0)$

Sappiamo che $\exp' = \exp$, per cui $d\exp_{z_0}$ è una mappa

\mathbb{C} -lineare e invertibile (perché è la moltiplicazione per $\exp'(z_0) = e^{z_0} \neq 0$)

Perciò, per il teorema di invertibilità locale, esistono un aperto $W_0 \subseteq U$

e un aperto $W_1 \subseteq \mathbb{C}$ con $y_0 \in W_0$, $z_0 \in W_1$ t.c. esiste $g: W_0 \rightarrow W_1$ C^∞ (perché \exp lo è)
che inverte $\exp|_{W_0}: W_0 \rightarrow W_1$

Poiché sia g sia L invertono \exp su W_0 (e sono continue, dunque anche L
ha valori in W_1) si ha $L=g$ su W_0 .

Ma g è differenziabile su W_0 , per cui lo è anche L ,

e poiché l'inversa di una mappa \mathbb{C} -lineare è \mathbb{C} -lineare, L è oloedomorfa
(per noti teoremi di Analisi II, $dL_y = (d\exp_{L(y)})^{-1} \forall y \in W_0$)

□

1-Forme complesse

Def. Una 1-forma complessa su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ è una funzione continua $\omega: U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{R} -lineare nella 2° variabile, cioè tale che $\forall z_0 \in U \quad \omega_{z_0} = \omega(z_0, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sia \mathbb{R} -lineare

esempio Se $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ è C^1 , allora $df: U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $df(z_0, v) = df_{z_0}(v)$ è una 1-forma complessa.
Se f è olomorfa, df_{z_0} è \mathbb{C} -lineare $\forall z_0 \in U$, ma non si fa questa richiesta di default

Def. Una forma ω su U si dice **esatta** se $\exists f: U \rightarrow \mathbb{C}$ C^1 t.c. $\omega = df$
Una tale f si chiama **primitiva** di ω
Una forma ω si dice **chiusa** se è localmente esatta, cioè $\forall z_0 \in U \exists W \subseteq U$ aperto t.c. $z_0 \in W$ e $\omega|_W$ è esatta in W (cioè ω ammette primitive locali)

Ricordiamo che $\text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-lineari}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ sono un \mathbb{C} -spazio vettoriale di dimensione 2, generato ad esempio da $\{dx, dy\}$ o $\{dz, d\bar{z}\}$, per cui una 1-forma complessa si può scrivere $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ o $\omega = a(z)dz + b(z)d\bar{z}$ con $a, b: U \rightarrow \mathbb{C}$ continue

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ C^1 a tratti.
Sia ω una 1-forma su U .
Si definisce **l'integrale di ω su γ**
$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

Si vede facilmente che valgono le seguenti proprietà:

(1) Se α è una riparametrizzazione positiva di γ , cioè $\exists \psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ C^1 t.c. $\psi(c) = a, \psi(d) = b, \alpha = \gamma \circ \psi$, allora $\int_{\alpha} \omega = \int_{\gamma} \omega$

(2) Se γ^{-1} è il cammino inverso di γ , $\int_{\gamma^{-1}} \omega = -\int_{\gamma} \omega$

Stiamo integrando funzioni complesse su $[a, b]$: si intende che integriamo separatamente parte reale e immaginaria.

esempio Sia $R > 0$ e sia $\gamma_R: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$
 $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$

Allora $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$

Infatti $\gamma_R'(t) = iRe^{it}$, per cui

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \cdot dz(\gamma'(t)) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + Re^{it} - z_0} (iRe^{it} dt) = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

Lemma Sia ω una 1-forma esatta su U , con primitiva F .
 Allora $\forall \gamma: [a, b] \rightarrow U$ cammino C^1 a tratti
 $\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$
 (in particolare, dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale di γ)

DIMOSTRAZIONE

Se γ è C^1 a tratti, lo decompongo in tratti C^1
 Possiamo assumere γC^1 .

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad \square$$

corollario Se ω è esatta su U e γ è un cammino chiuso in U ,
 allora $\int_{\gamma} \omega = 0$

Una forma chiusa non esatta

proposizione Sia $L: U \rightarrow \mathbb{C}$ una qualsiasi branca del logaritmo
 Allora $L'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in U$

DIMOSTRAZIONE

$\forall z \in U \quad e^{L(z)} = z$, da cui
 $\exp'(L(z)) \cdot L'(z) = 1 \Rightarrow (\exp)' = \exp \quad \frac{z}{z} \Rightarrow \exp(L(z)) \cdot L'(z) = 1$
 quindi $z L'(z) = 1 \Rightarrow L'(z) = \frac{1}{z} \quad \square$

teorema la forma $\frac{dz}{z}$ definita su \mathbb{C}^* è chiusa ma non esatta.

DIMOSTRAZIONE

$\forall z_0 \in \mathbb{C}^*$ trovo un intorno $U \subseteq \mathbb{C}^*$ di z_0 semplicemente connesso
 (basta una palla) ed esiste una branca del logaritmo $L: U \rightarrow \mathbb{C}$.

Tale L fornisce una primitiva di $\frac{dz}{z}$ su U , perciò $\frac{dz}{z}$ è chiusa
 ($dL = L'dz = \frac{dz}{z}$)

ω non è esatta, perché se $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\gamma(t) = e^{it}$
 γ è chiuso ma $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad \square$

teoremaSia ω una 1-forma su U Allora ω è esatta $\iff \int_{\gamma} \omega = 0 \quad \forall \gamma$ cammino C' a tratti chiuso**DIMOSTRAZIONE** (\implies) appena visto (\impliedby) Definiamo una primitiva F di ω Posso supporre U cpa, lavorando separatamente in ogni componente.Scegliamo $z_0 \in U$ a caso, e $\forall z \in U$ sia $\gamma_z: [0,1] \rightarrow U$ cammino C' a tratti con $\gamma_z(0) = z_0, \gamma_z(1) = z$ Pongo $F(z) = \int_{\gamma_z} \omega$ Dico che F non dipende dalla scelta di γ_z . Infatti, se α_z è un altro cammino tra z_0 e z , allora $\alpha_z * \gamma_z^{-1}$ è chiuso,per cui $\int_{\alpha_z} \omega + \int_{\gamma_z^{-1}} \omega = \int_{\alpha_z * \gamma_z^{-1}} \omega \stackrel{(10)}{=} 0$ Dunque $\int_{\alpha_z} \omega = - \int_{\gamma_z^{-1}} \omega = \int_{\gamma_z} \omega$ Vediamo ora che $dF = \omega$ Sia $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ Calcoliamo $\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1)$. Scelto un cammino γ che congiunge z_0 a $z_1 = x_1 + iy_1$,pongo $\gamma_h: [0, h] \rightarrow U$, $\gamma_h(t) = z_1 + t$, cioè mi muovo in orizzontale da z_1 di una quantità t Per definizione di F , $F(z_1+h) = \int_{\gamma * \gamma_h} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma_h} \omega = F(z_1) + \int_{\gamma_h} \omega$ perciò $F(z_1+h) - F(z_1) = \int_{\gamma_h} \omega = \int_0^h (P(\gamma_h(t))dx + Q(\gamma_h(t))dy)(\gamma_h'(t))dt =$

$$= \int_0^h (P(\gamma_h(t))dx + Q(\gamma_h(t))dy)(1,0)dt = \int_0^h P(\gamma_h(t))dt$$

poiché $dx(1,0) = 1, dy(1,0) = 0$

$$\text{Perciò } \frac{\partial F}{\partial x}(z_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h P(\gamma_h(t))dt}{h} \stackrel{\text{teorema della media}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} P(\gamma_h(c_h)) =$$

$$= P(\gamma_h(0)) = P(z_1)$$

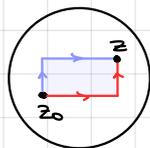
Analogamente, utilizzando le curve $\gamma_h(t) = z_1 + it$,si ottiene $\frac{\partial F}{\partial y}(z_1) = Q(z_1)$, dunque

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = Pdx + Qdy = \omega$$

□

Se $U = D$ disco aperto, per la dimostrazione,

avremmo potuto usare solo curve date da due segmenti paralleli

agei assi per definire F e per calcolarne le derivate parziali:

Questo implica il seguente

teorema Se D è un disco, ω è esatta su D se e solo se $\int_{\partial R} \omega = 0 \quad \forall$ cammino ∂R che parametrizza il bordo di un rettangolo completamente contenuto in D .

Abbiamo visto che una forma è esatta se e solo se il suo integrale lungo un cammino γ dipende solo da $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

Vediamo ora che ω è chiusa se e solo se $\int_{\gamma} \omega$ dipende solo dalla classe di omotopia a estremità fissi di γ .

Per prima cosa, se ω è chiusa su U e $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ (γ è anche solo C^1), posso definire una primitiva di ω lungo γ così:

per compattezza di $[a, b]$, posso trovare $a = t_0 < \dots < t_n = b$ in modo tale che $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq W_i$ aperto tale che $\omega|_{W_i} = dF_i$, $F_i: W_i \rightarrow \mathbb{C}$ (ω , essendo chiusa, ammette primitive locali)

Scelta $F_0: W_0 \rightarrow \mathbb{C}$ a caso, modifico F_1 , sommandole una costante, in modo che $F_1(\gamma(t_1)) = F_0(\gamma(t_1))$. Fatto questo, modifico poi F_2 in modo che $F_2(\gamma(t_2)) = F_1(\gamma(t_2))$ e proseguo fino a F_n .

Così facendo, posso porre $F(t) = F_i(\gamma(t))$ se $t \in [t_i, t_{i+1}]$

Chiamo questa $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una primitiva di ω lungo γ

Questa F ha la proprietà che, su ogni $[t_i, t_{i+1}]$, è uguale a $G \circ \gamma$, dove G è una primitiva locale di ω .

Fatto: se γ è C^1 a tratti, $\int_{\gamma} \omega = F(b) - F(a)$

Discende facilmente dai seguenti fatti

(1) La primitiva di ω lungo γ è unica a meno di costante, perciò non dipende dalle scelte fatte.

(2) Già sappiamo che $\int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} \omega = F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i)) = F(t_{i+1}) - F(t_i)$
per cui $\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} F(t_{i+1}) - F(t_i) = F(b) - F(a)$

teorema Sia ω 1-forma su U .

Allora ω è chiusa $\iff \int_{\gamma} \omega$ dipende solo dalla classe di omotopia a estremi fissi di γ

DIMOSTRAZIONE

\Leftarrow Dato $z_0 \in U$, se $W \subseteq U$ è un intorno semplicemente connesso di z_0 (ad esempio un disco aperto), due cammini in W aventi gli stessi estremi sono automaticamente omotopi a estremi fissi, dunque $\forall \gamma: [0,1] \rightarrow W$, $\int_{\gamma} \omega$ dipende solo dagli estremi di γ , perciò ω si restringe a una forma esatta su W , dunque ω è chiusa

\Rightarrow Supponiamo ω chiusa e siano $\alpha, \beta: [0,1] \rightarrow U$ cammini omotopi a estremi fissi tramite l'omotopia H , con $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, $\alpha(1) = \beta(1) = z_1$



Per compattezza di $[0,1] \times [0,1]$, posso trovare $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$H\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}\right]\right) \subseteq W_{(h,k)} \quad \forall h, k = 0, \dots, n-1$$

dove $W_{(h,k)}$ è un aperto di U su cui ω ammette una primitiva $F_{(h,k)}$

Fissata $F_{(0,0)}$, come fatto per la primitiva di ω lungo un cammino, posso costruire una primitiva $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ primitiva di ω lungo H

t.c. $F|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}\right]} = G \circ H|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{h}{n}, \frac{h+1}{n}\right]} \quad \forall$ quadratino, dove G è una primitiva locale di ω .

Notiamo che, poiché l'omotopia è a estremi fissi, F è costante

su $\{0\} \times [0,1]$ e su $\{1\} \times [0,1]$. Ma $F|_{[0,1] \times \{0\}}$ dà una primitiva di

ω lungo α , e $F|_{[0,1] \times \{1\}}$ dà una primitiva di ω lungo β ,

$$\text{dunque } \int_{\beta} \omega = F(1,1) - F(0,1) = F(1,0) - F(0,0) = \int_{\alpha} \omega$$

□

corollario U dominio semplicemente connesso, ω 1-forma su U .

Allora ω è chiusa $\iff \omega$ è esatta

DIMOSTRAZIONE

Infatti, se U è semplicemente connesso, due cammini con gli stessi estremi sono omotopi. □

teorema $w = Pdx + Qdy$ 1-forma C^1 su $U \subseteq \mathbb{C}$.
 Allora w è chiusa $\iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

DIMOSTRAZIONE

(\implies) w chiusa \implies localmente $w = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$,
 cioè $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$, ma allora $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
Schwarz

(\impliedby) Sia $z_0 \in U$, e sia $D \subseteq U$ un disco aperto centrato in z_0 .

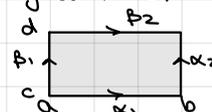
Basta vedere che $w|_D$ è esatta, cioè che $\int_R w = 0 \forall$ rettangolo $R \subseteq D$.

Sia $R = [a, b] \times [c, d]$. Basta vedere che

$$\int_{\alpha_1 \times \alpha_2} w = \int_{\beta_1 \times \beta_2} w$$

Per farlo, $\forall t \in [c, d]$ introduco la curva

$$\gamma_t = \alpha_t * \beta_t * \alpha_t^{-1} * \beta_t^{-1}$$



Così $\gamma_c = \alpha_1 * \alpha_2$, mentre $\gamma_d = \beta_1 * \beta_2$

Per concludere, basta vedere che $\int_{\gamma_t} w$ non dipende da t ,

$$\text{cioè } \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} w = 0$$

$$\text{Ma } \int_{\gamma_t} w = \int_{\alpha_t} w + \int_{\beta_t} w + \int_{\alpha_t^{-1}} w + \int_{\beta_t^{-1}} w = \int_c^t Q(a, s) ds + \int_a^b P(s, t) ds + \int_t^d Q(b, s) ds$$

Derivando questa quantità rispetto a t , otteniamo

$$Q(a, t) + \int_a^b \frac{\partial P}{\partial y}(s, t) ds - Q(b, t) = Q(a, t) + \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(s, t) ds - Q(b, t) = \\ = Q(a, t) + Q(b, t) - Q(a, t) - Q(b, t) = 0$$

□

corollario Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ C^1 . Allora
 f è olomorfa $\iff f(z)dz$ è chiusa

DIMOSTRAZIONE

Se $f = a(x, y) + i(b(x, y))$, a, b reali, allora

$$f(z)dz = (a+ib)(dx+idy) = (a+ib)dx + (-b+ia)dy$$

$$\text{è chiusa } \iff \frac{\partial(a+ib)}{\partial y} = \frac{\partial(-b+ia)}{\partial x} \iff$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} + i \frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x} + i \frac{\partial a}{\partial x} \iff \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial x} \text{ (Cauchy-Riemann)}$$

$$\iff f \text{ è olomorfa.}$$

□

corollario Sia $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ C^1 . Allora
 $f(z)dz$ è esatta $\iff \exists F: U \subseteq \mathbb{C} \text{ t.c. } F' = f$, F olomorfa

DIMOSTRAZIONE

$$f(z)dz \text{ esatta } \iff \exists F: f(z)dz = d_2 F = \frac{\partial F}{\partial z}(z)dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z)d\bar{z}$$

$$\iff f(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z), \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \iff F' = f, F \text{ olomorfa}$$

□

Lemma Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ continua, f olomorfa su $U \setminus \{z_0\}$. Allora f è olomorfa su U .

DIMOSTRAZIONE

Sia $z_0 \in D \subseteq \mathbb{C}$, con D disco aperto

Mostro che f è olomorfa su D , facendo vedere che

$\int_{\partial R} f(z) dz = 0 \quad \forall \partial R$ bordo di rettangolo contenuto in D con lati // agli assi
A meno di traslazione, posso supporre $z_0 = 0$.

Fisso $R \in D$ rettangolo con lati // agli assi.

Caso 1: $z_0 \notin R$. Siccome f è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$, è olomorfa in un intorno di R .

Caso 2: $z_0 \in R$. Soppingo z_0 sia su un lato orizzontale di R

Chiamo $R_\delta = R \cap \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \geq \delta\}$. Considero

$$\int_{\partial R} f(z) dz - \int_{\partial R_\delta} f(z) dz = \int_a^b f(x, 0) dx + i \int_0^\delta f(b, y) dy - \int_a^b f(x, \delta) dx - i \int_0^\delta f(a, y) dy$$

Siccome f è continua su R compatto, f è uniformemente continua.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists 0 < \delta < \varepsilon : |z - \xi| < \delta \implies |f(z) - f(\xi)| < \varepsilon$$

Quindi

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz - \int_{\partial R_\delta} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(x, 0) - f(x, \delta)| dx + \int_0^\delta |f(b, y) - f(a, y)| dy \leq 2M$$

$$\text{Sia } M = \max_{z \in R} |f(z)|$$

$$\leq \varepsilon(b-a) + 2M\delta$$

Siccome R_δ è un rettangolo come nel caso 1, ho che $\int_{\partial R_\delta} f(z) dz = 0$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq \varepsilon(b-a) + 2M\delta$

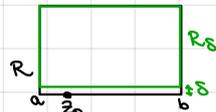
Quindi $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$

Analogo se z_0 sta su un lato verticale di ∂R .

Caso 3: $z_0 \in \mathring{R}$.

Divido R in due rettangoli R_1 e R_2 tali che $z_0 \in \partial R_1, z_0 \in \partial R_2$

Quindi R_1 e R_2 sono rettangoli del caso 2. □



Def. Sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva chiusa. Sia $z_0 \notin \gamma([0, 1])$

l'indice di avvolgimento di γ rispetto a z_0 è

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Oss Sia $\gamma_R: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_R(t) = z_0 + R e^{it}$

$$\operatorname{Ind}(\gamma_R, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R e^{it}} i R e^{it} dt = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = 1$$

Oss Siccome $\frac{dz}{z - z_0}$ è chiusa, $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0)$ dipende solo dalla classe di γ per omotopia a estremi fissi.

proposizione Sia γ una curva chiusa e $z_0 \in \gamma([0,1])$
Allora $\text{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE

Sia $p = \gamma(0)$

Siccome $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} \sim S^1$, si ha che $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, p) = \mathbb{Z} \cdot [\gamma_1]$
con $\gamma_1(t) = z_0 + R e^{it}$, $R = |p - z_0|$

Quindi $\exists n \in \mathbb{Z} : [\gamma] = n[\gamma_1] = \underbrace{[\gamma_1 * \dots * \gamma_1]}_{n \text{ volte}}$

Osservo che $\gamma_n = \gamma_1 * \dots * \gamma_1 = z_0 + R e^{int}$

Calcolo $\text{Ind}(\gamma, z_0) = \text{Ind}(\gamma_n, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + R e^{int} - z_0} \cdot i n R e^{int} dt = \frac{n 2\pi i}{2\pi i} = n$ \square

teorema:
formula
di cauchy

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa su U .

Sia $\gamma: [0,1] \rightarrow U$ chiusa, omotopa ad una costante.

Sia $z \in U \setminus \gamma([0,1])$. Allora

$$\text{Ind}(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

DIMOSTRAZIONE

Definisco $g: U \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \xi \in U \setminus \{z\} \\ f'(z) & \xi = z \end{cases}$$

Siccome f è olomorfa, g è continua su U .

Inoltre g è olomorfa su $U \setminus \{z\}$

Per il lemma, g è olomorfa su $U \iff \int_{\gamma} g(\xi) d\xi$ chiusa

Quindi $\int_{\gamma} g(\xi) d\xi$ dipende solo da $[\gamma]$

$$\implies \int_{\gamma} g(\xi) d\xi = \int_{\gamma_0} g(\xi) d\xi = 0$$

Quindi

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\text{cioè } \text{Ind}(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$
 \square

teorema Sia $B = B(z_0, R)$. Sia $h: \partial B \rightarrow \mathbb{C}$ continua.

Sia $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ (parametrizzazione di ∂B)

Sia $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \forall z \in B$

Allora

(i) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ (con raggio di convergenza $\geq R$)

(ii) $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$

Quindi f è olomorfa su B e $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

DIMOSTRAZIONE

Assumiamo $z_0 = 0$ e prendiamo $\xi \in \partial B$, $z \in B$

Quindi $|z/\xi| < 1$. Inoltre $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 - z/\xi} = \frac{1}{\xi} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\xi^{n+1}}$

e si ha che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\xi^{n+1}}$ converge assolutamente e uniformemente, perché $|z/\xi| < 1$.
Calcoliamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int_{\gamma} \frac{h(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

Definendo $a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$, segue la tesi.

Per z_0 arbitrario, definiamo $w := z - z_0$

$$g(w) := f(w + z_0) = f(z)$$

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\xi)}{\xi - (w + z_0)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\xi + z_0)}{\xi - w} d\xi \quad \text{con } \gamma(t) = \gamma(t) - z_0.$$

Posso applicare il caso precedente a g :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\xi + z_0)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \square$$

corollario Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto con $\overline{B(z_0, R)} \subseteq U$ e sia f olomorfa su U .

Allora

(i) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ (con raggio di convergenza $\geq R$)

(ii) $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ con $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$

Quindi f è analitica.

DIMOSTRAZIONE

So che $\text{Ind}(\gamma, z_0) = 1$. Applico la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

La tesi segue applicando il teorema precedente. \square

corollario:
disuguaglianza di
Cauchy

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto con $\overline{B(z_0, R)} \subseteq U$.

Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

Sia $M(r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Allora

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M(r)}{r^n} \quad \forall r > 0$$

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema precedente $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, R)$

con $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ con $\gamma(t) = z_0 + Re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$

Inoltre si ha $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Quindi

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(z_0 + Re^{it} - z_0)^{n+1}} \right| |iRe^{it}| dt =$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + Re^{it})|}{R^n} dt \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M(r)}{R^n} dt = \frac{n! M(r)}{R^n} \quad \square$$

corollario:
teorema di
Liouville

Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

Se f è limitata, allora f è costante.

DIMOSTRAZIONE

Sia $M(r, z_0) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$

f limitata $\Rightarrow \exists M > 0$ t.c. $|f(z)| < M \quad \forall z$

Quindi $M(r, z_0) \leq M \quad \forall r > 0, \forall z_0 \in \mathbb{C}$

Per la disuguaglianza di Cauchy

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r, z_0) \leq \frac{n!}{r^n} M$$

Se passo al limite $r \rightarrow +\infty$, ottengo

$$|f^{(n)}(z_0)| = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$$

Quindi f è costante. \square

corollario: teorema
fondamentale dell'algebra

Sia $p(z)$ polinomio di grado n a coefficienti complessi.

Allora $p(z)$ ha n radici contate con molteplicità

DIMOSTRAZIONE

Sopponiamo $n > 0$ e supponiamo per assurdo $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Allora $\frac{1}{p(z)}$ è olomorfa su \mathbb{C} .

Inoltre, se $|z| \rightarrow +\infty$, allora $|p(z)| \rightarrow +\infty$

quindi $\frac{1}{|p(z)|} \rightarrow 0$

Quindi $\exists M > 0 : \frac{1}{|p(z)|} < M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Quindi $\frac{1}{p(z)}$ è olomorfa su \mathbb{C} e limitata, quindi per Liouville è costante \downarrow

\square

singolarità

DEF. Se f è olomorfa su $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, allora z_0 è **singolarità** per f .

DEF. Siano $0 \leq r < R \leq +\infty$. Definisco
 $A(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$
 l'**anello** o **corona** tra r e R .

Quindi $A(0, R) = B(0, R) \setminus \{0\}$
 $A(r, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, r)}$
 $A(0, +\infty) = \mathbb{C}^*$

Lemma: Formula di Cauchy per anelli

Sia f olomorfa su $A(r, R)$ per qualche $0 \leq r < R \leq +\infty$.
 Sia $z_0 \in A(r, R)$. Siano ρ_1, ρ_2 tali che $r < \rho_1 < |z_0| < \rho_2 < R$.
 Siano $\gamma_j(t) = \rho_j e^{it}$ con $j=1, 2$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

DIMOSTRAZIONE

$$\text{Sia } g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z_0)}{\xi - z_0} & \forall \xi \in A(r, R) \setminus \{z_0\} \\ f'(z_0) & \xi = z_0 \end{cases}$$

g è olomorfa su $A(r, R) \setminus \{z_0\}$, g continua su $A(r, R)$
 quindi g è olomorfa su $A(r, R)$.

Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1} g(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2} g(\xi) d\xi \quad \text{poiché } g \text{ olomorfa} \Leftrightarrow \int g(\xi) d\xi \text{ chiusa}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma} g(\xi) d\xi \text{ dipende solo da } [\gamma]$$

$$\text{e } \rho_2 \sim \alpha \times \rho_1 \times \alpha^{-1}$$



$$\Rightarrow f(z_0) \left[\underbrace{-\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1} \frac{d\xi}{\xi - z_0}}_{\text{chiusa su } B(0, \rho_1)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2} \frac{d\xi}{\xi - z_0}}_{\text{Ind}(\gamma_{\rho_2}, z_0)} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

Quindi $\int_{\rho_1} \frac{d\xi}{\xi - z_0} = 0$ perché $\frac{d\xi}{\xi - z_0}$ chiusa e $\rho_1 \sim$ costante in $B(0, \rho_1)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\rho_2} \frac{d\xi}{\xi - z_0} = 1 \quad \text{perché indice di avvolgimento di } \gamma_{\rho_2} \text{ in } z_0.$$

□

Def Una serie di Laurent centrata in z_0 è

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

Siano $f_+(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$

e $f_-(z) = \sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n = \sum_{m \geq 0} a_{-m} \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^m$

Dico che f converge se f_+ e f_- convergono.

Sia R il raggio di convergenza di $\sum_{n \geq 0} a_n w^n$

$\Rightarrow f_+$ converge assolutamente e uniformemente $\forall z: |z - z_0| < R$

Sia $\frac{1}{r}$ il raggio di convergenza di $\sum_{m \geq 0} a_{-m} w^m$

$\Rightarrow f_-$ converge assolutamente e uniformemente $\forall z: \left|\frac{1}{z - z_0}\right| < \frac{1}{r}$

Quindi f converge assolutamente e uniformemente su $A(r, R) + z_0$

Lemma Sia $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ e sia f convergente su $A(r, R) + z_0$.

Allora:

(i) f è olomorfa su $A(r, R) + z_0$

(ii) $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall r < \rho < R$

con $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$

teorema Siano $0 < r < R \leq +\infty, z_0 \in \mathbb{C}$.

Sia f olomorfa su $A(r, R) + z_0$.

Allora f si esprime in modo unico come serie di Laurent convergente su $A(r, R) + z_0$.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo $z_0 = 0$.

Sia $z \in A(r, R)$. Per la formula di Cauchy per anelli,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{con } r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R$$

Se $|\xi| = \rho_2 > |z|$, allora $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} = \frac{1}{\xi} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\xi^{n+1}}$
 converge perché $\left|\frac{z}{\xi}\right| < 1$

Se $|\xi| = \rho_1 < |z|$, allora $-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\xi}{z}} = \sum_{m \geq 0} \frac{\xi^m}{z^{m+1}} = \sum_{m \geq 0} \frac{z^{-m}}{\xi^{m+1}}$
 converge perché $\left|\frac{\xi}{z}\right| < 1$

Quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_2}} f(\xi) \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\xi^{n+1}} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho_1}} f(\xi) \sum_{m \geq 0} \frac{z^{-m}}{\xi^{m+1}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{n \geq 0} z^n \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi + \sum_{m \geq 0} z^{-m} \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(\xi)}{\xi^{m+1}} d\xi \right]$$

serie di Laurent centrata in 0

Il caso z_0 arbitrario è analogo. □

DEF Sia f olomorfa su $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Sia $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ la sua espansione di Laurent centrata in z_0 .
La singolarità z_0 si dice

• z_0 è **eliminabile** se $a_n = 0 \quad \forall n < 0$

Quindi $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ è olomorfa

• z_0 è **polo di ordine $m > 0$** se $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0 \quad \forall n < -m$

Quindi $f(z) = \sum_{n \geq -m} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^m} \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_{n-m} (z - z_0)^n}_{\text{olomorfa}}$

• z_0 è **essenziale** se non è né eliminabile né polo

esempio $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ha singolarità essenziale in $z=0$

teorema:
estensione di
Riemann

Sia f olomorfa su $U \setminus \{z_0\}$, con U aperto.

Se $|f(z)|$ è limitato su $U \setminus \{z_0\}$

allora z_0 è singolarità eliminabile.

DIMOSTRAZIONE (1)

Sia $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ definita $h(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{se } z \neq z_0 \\ 0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$

h è olomorfa in z_0 con $h'(z_0) = 0$, infatti:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \quad \text{poiché } |f| \text{ è limitata}$$

Quindi h è olomorfa su U e ammette uno sviluppo in serie

$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ vicino a z_0 . Poiché $h(z_0) = h'(z_0) = 0$, si ha $a_0 = a_1 = 0$

Quindi h ha in z_0 uno zero di ordine almeno 2, quindi

$\frac{h(z)}{(z - z_0)^2}$ fornisce l'estensione di f richiesto. □

DIMOSTRAZIONE (2)

Sia $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ uno sviluppo di Laurent di f centrato in z_0

Sia $R > 0$ tale che lo sviluppo converga su $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$

Sia $M = \sup \{ |f(z)| \mid z \in B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \}$

Allora, $\forall 0 < r < R$ le disuguaglianze di Cauchy danno $|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Se $n < 0$, si ha $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{M}{r^n} = 0$, quindi necessariamente $a_n = 0$

Quindi lo sviluppo di Laurent di f non contiene potenze negative

e f si estende a una funzione olomorfa. □

teorema di
Casorati-
Weierstrass

Sia f olomorfa su $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Se z_0 è singolarità essenziale, allora

$f(B(z_0, R) \setminus \{z_0\})$ è denso in \mathbb{C} .

DEF Una funzione $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è meromorfa se è olomorfa su $U \setminus S$, dove $S \subseteq U$ è discreto e $\forall z \in S$ è polo per f .

OSS Sia U connesso. Siamo $g, h: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe, h non costante 0. Allora $\frac{g}{h}$ è meromorfa su U , perché gli zeri di h sono un insieme discreto di U .

OSS Se $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$ e z_0 è zero di h di ordine $m > 0$, allora $h(z) = (z - z_0)^m h_1(z)$ con h_1 olomorfa e $h_1(z_0) \neq 0$.
Quindi $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{g(z)}{h_1(z)}$ con $\frac{g}{h_1}$ olomorfa in un intorno di z_0 .
Quindi z_0 è polo di ordine m per f .

DEF Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$. Sia $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ l'espansione in serie di Laurent di f in $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ (supponiamo f olomorfa su $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$).
Il residuo di f in z_0 è
 $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$

OSS Se f è olomorfa su $B(z_0, R)$, $\text{Res}(f, z_0) = 0$.

Per un risultato precedente

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \text{con } \gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}, t \in [0, 1]$$

$$\text{Quindi } \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} f(\xi) d\xi$$

esempio z_0 è un polo semplice di f (di ordine 1):

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\text{Quindi } \text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Se z_0 è un polo di ordine m di f

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Quindi

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + (z - z_0) a_{-m+1} + \dots + (z - z_0)^{m-1} a_{-1} + (z - z_0)^m [\dots]$$

$$(m-1)! \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0)^m f(z) \right)^{(m-1)}(z)$$

OSS Se $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ e z_0 è polo semplice, allora

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)(z - z_0)}{h(z)} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}$$

Mostriamo ora che i residui possono essere usati per calcolare certi integrali.

teorema dei residui

Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa (olomorfa su $U \setminus S$)

Sia $D \subseteq U$ omeomorfo a un disco, con $S \cap D = \emptyset$.

Sia α una parametrizzazione di ∂D in senso antiorario.

Allora

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in S \cap D} \text{Res}(f, z)$$

OSS Siccome S è discreto e D è compatto, $S \cap D$ è finito.

DIMOSTRAZIONE

Sia $S \cap D = \{z_1, \dots, z_n\}$

Sia $p = \alpha(0) = \alpha(1) \in \partial D$

Siano γ_i cammini da p a $\gamma_i(1)$:

$$B(z_i, |z_i - \gamma_i(1)|) \subseteq D, |z_i - \gamma_i(1)| < |z_i - z_j| \quad \forall j \neq i$$

Siano α_i curve chiuse intorno a z_i basate in $\gamma_i(1)$

Dico che $\beta = \gamma_1 * \alpha_1 * \gamma_1^{-1} * \dots * \gamma_n * \alpha_n * \gamma_n^{-1}$ è omotopa a estremi fissi a α .

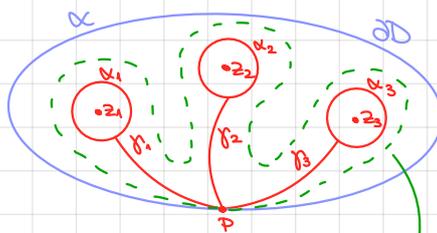
Quindi

f olomorfa in un intorno di ∂D

$$\int_{\alpha} f(z) dz \stackrel{\downarrow}{=} \int_{\beta} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i * \alpha_i * \gamma_i^{-1}} f(z) dz =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\int_{\gamma_i} f(z) dz + \int_{\alpha_i} f(z) dz + \int_{\gamma_i^{-1}} f(z) dz \right] = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i)$$

bordo di $B(z_i, R)$ per qualche R
e f olomorfa su $B(z_i, R) \setminus \{z_i\}$



omotopia tra α
e $\gamma_1 * \alpha_1 * \gamma_1^{-1} * \gamma_2 * \alpha_2 * \gamma_2^{-1} * \gamma_3 * \alpha_3 * \gamma_3^{-1}$

□

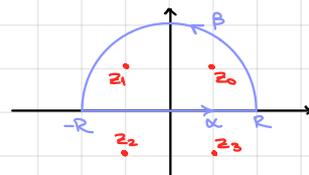
calcolo di integrali

esempio Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$

Considero $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$

Quindi f meromorfa (quoziente di omonome)

con poli $S = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$



Considero $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z \geq 0, |z| \leq R\}$

Osservo che per $R > 1$ $\partial D \cap S = \emptyset$, e D_R è omeomorfo a un disco.

Applico il teorema dei residui:

$$\int_{\alpha \times \beta} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1))$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \text{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \text{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}}$$

$$\int_{\alpha \times \beta} \frac{1}{z^4+1} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \cdot (e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}}) = \frac{\pi i}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\alpha \times \beta} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{\alpha} \frac{1}{z^4+1} dz + \int_{\beta} \frac{1}{z^4+1} dz$$

$$\bullet \int_{\beta} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{R^4 e^{4it} + 1} \cdot R i e^{it} dt \quad : |R i e^{it}| \leq R, |R^4 e^{4it} + 1| \geq R^4 - 1$$

$$\text{Quindi } \left| \int_{\beta} \frac{1}{z^4+1} dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{|R i e^{it}|}{|R^4 e^{4it} + 1|} dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^4 - 1} dt = \frac{\pi R}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Quindi } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\beta} \frac{1}{z^4+1} dz = 0$$

$$\bullet \int_{\alpha} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{t^4+1} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$

$$\text{Quindi } \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\alpha \times \beta} \frac{1}{z^4+1} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\alpha} \frac{1}{z^4+1} dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\beta} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$

esempio Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$

Considero $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{\cos z + i \sin z}{z^2+1}$

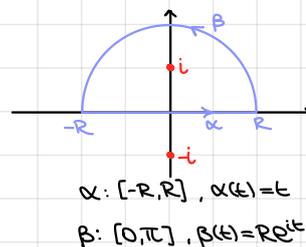
f è una funzione meromorfa con poli $S = \{i, -i\}$

Considero $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0, |z| \leq R\}$

$$\int_{\alpha \times \beta} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \frac{\pi}{e}$$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{e^{-1}}{2i} \quad \leftarrow \text{0 (dispari)}$$

$$\text{Osservo che } \int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\alpha} \frac{\cos(z)}{z^2+1} dz + i \int_{\alpha} \frac{\sin(z)}{z^2+1} dz = \int_{-R}^R \frac{\cos(t)}{t^2+1} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1} dt$$



$$\left| \int_{\beta} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{|e^{iR e^{it}}|}{|R^2 e^{2it} + 1|} |i R e^{it}| dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2 - 1} dt = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

$$|e^{iR e^{it}}| = |e^{iR \cos t - R \sin t}| = e^{-R \sin t} \leq 1$$

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\alpha \times \beta} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\alpha} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\beta} f(z) dz$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1} dt \quad \quad \quad 0$$

$$\text{Quindi } \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{2e}$$